

Sandro Longo
Maria Giovanna Tanda

Esercizi di Idraulica e di Meccanica dei Fluidi



Springer

UNITEXT

A Francesca
S.L.

A Francesco
M.G.T.

Sandro Longo, Maria Giovanna Tanda

Esercizi di Idraulica e di Meccanica dei Fluidi

 Springer

SANDRO LONGO

DICATeA

Dipartimento di Ingegneria Civile,
dell'Ambiente, del Territorio e Architettura
Università degli Studi di Parma

MARIA GIOVANNA TANDA

DICATeA

Dipartimento di Ingegneria Civile,
dell'Ambiente, del Territorio e Architettura
Università degli Studi di Parma

ISBN 978-88-470-1347-6

DOI 10.1007/978-88-470-1348-3

e-ISBN 978-88-470-1348-3

© Springer-Verlag Italia 2009

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Via Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org.

Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

In copertina: una parziale riproduzione di un bozzetto a tempera su cartoncino di Silvia Prada, pittrice in Parma (2009).

Layout copertina: Francesca Tonon, Milano

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago TeX-Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)

Stampa: Signum, bollate (MI)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

Questo eserciziario ha origine dalle esercitazioni e dalle prove scritte degli insegnamenti di Idraulica, Idraulica A e Idraulica B, da noi tenuti negli ultimi anni nel Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ingegneria Meccanica, Ingegneria dell'Ambiente e del Territorio. Gli esercizi, completamente svolti, possono costituire un utile completamento delle Lezioni e servono ad abituare gli Allievi ad eseguire i calcoli applicati a situazioni di interesse tecnico. In alcuni esercizi proponiamo due differenti metodi risolutivi, per evidenziare che il livello di complessità dei calcoli è spesso rapportato alla scelta del metodo. In generale abbiamo privilegiato il metodo più semplice. I primi due Capitoli trattano esercizi di spinta su superfici piane e gobbe. Il Capitolo III è interamente dedicato ai corpi galleggianti. Nel Capitolo IV si affrontano alcuni esercizi classici che richiedono l'applicazione dei bilanci di quantità di moto e di momento angolare della quantità di moto, in riferimenti inerziali e non inerziali. Nel Capitolo V si analizzano i sistemi di condotte, con applicazioni particolari agli impianti industriali nel Capitolo successivo. Il Capitolo VII tratta gli impianti idraulici con macchine (pompe e turbine). A seguire il Capitolo VIII, dedicato a fenomeni transitori nelle condotte chiuse. L'ultimo Capitolo tratta i moti a pelo libero. In Appendice sono riportati alcuni dati e formule di pratico interesse.

Ci auguriamo che le numerose e attente revisioni abbiano eliminato la maggior parte delle imprecisioni nell'uso dei simboli e nei calcoli numerici. Un ringraziamento ai numerosi Colleghi che hanno letto il testo e rifatto gli esercizi, suggerendo i miglioramenti necessari per una più agevole comprensione e verificando la correttezza dei risultati, agli Ingg. Francesca Aureli, Andrea Zanini, Luca Chiapponi e Marco D'Oria. A nessuno di loro è attribuibile ogni imprecisione o errore eventualmente ancora presente.

Parma, maggio 2009

*Sandro Longo
Maria Giovanna Tanda*

Indice

Prefazione	V
1 Spinta su superfici piane	1
2 Spinta su superfici curve	27
3 Galleggianti	85
4 Bilanci di quantità di moto	117
5 Sistemi di condotte	187
6 Circuiti idraulici industriali	217
7 Circuiti con macchine idrauliche: pompe e turbine	229
8 Transitori idraulici	263
9 Correnti a pelo libero	299
Appendice A Parametri geometrici e statici per sezioni piane comuni e superfici e volumi di solidi	363
Appendice B Proprietà fisiche dei fluidi	371
Appendice C Perdite di carico nelle condotte e nei canali	377
Bibliografia	385

Spinta su superfici piane

Esercizio 1.1

Una porta a forma di triangolo isoscele è incernierata sul lato superiore orizzontale (Figura 1.1). Il fluido contenuto è calcestruzzo (peso specifico relativo $s = 2.4$). Calcolare:

- la spinta sulla porta e il punto di applicazione della spinta;
- la minima forza necessaria da applicare in D per evitare che la porta si apra.

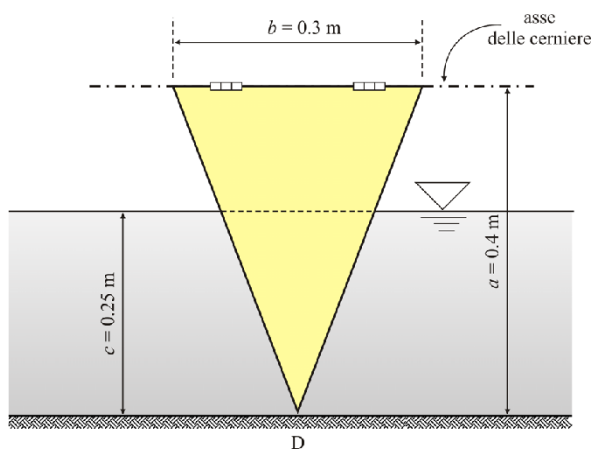


Figura 1.1. Schema della porta triangolare

Soluzione

Il modulo della spinta è pari al prodotto della pressione nel baricentro della superficie immersa per l'area della superficie immersa. Scelto il sistema di coordinate visibile in Figura 1.2, si calcola un affondamento del baricentro $z_G = c/3$. Quindi:

$$F = \gamma_{cls} \frac{c}{3} \frac{b'c}{2} = 2.4 \times 9806 \times \frac{0.25}{3} \times \frac{0.1875 \times 0.25}{2} = 46 \text{ N.}$$

b' è la base del triangolo in corrispondenza della retta di sponda, calcolata per similitudine di triangoli:

$$b' = \frac{bc}{a} = \frac{0.3 \times 0.25}{0.4} = 0.1875 \text{ m.}$$

Il punto di applicazione della spinta ha un affondamento pari a:

$$z_C = \frac{I_{xx}}{S_x} = \frac{\frac{bc^4}{12a}}{\frac{bc^3}{6a}} = \frac{c}{2} = 0.125 \text{ m.}$$

I_{xx} e S_x sono, rispettivamente, il momento d'inerzia e il momento statico della superficie immersa rispetto alla linea di sponda. I valori del momento d'inerzia e del momento statico sono riportati in Appendice A.

Applicando la condizione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse della cerniera, risulta:

$$R = \frac{F(a - c/2)}{a} = \frac{46 \times (0.4 - 0.125)}{0.4} = 31.625 \text{ N.}$$

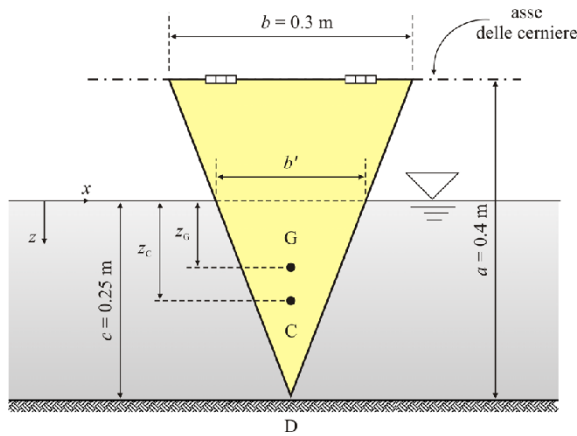


Figura 1.2. Sistema di coordinate adottato per il calcolo

Esercizio 1.2

Il serbatoio in Figura 1.3 contiene kerosene nella parte superiore, acqua mista a fango nella parte inferiore. Il serbatoio è chiuso da una paratoia piana AB, di profondità unitaria e di altezza pari a $H = (2 + C_u/2)$ m. Il peso specifico del kerosene è pari a $\gamma_{ker} = 0.81 \times \gamma_{acqua}$, il peso specifico dell'acqua mista a fango aumenta linearmente verso il fondo, secondo la seguente relazione:

$$\gamma(z') = \gamma_{acqua} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{49} \frac{z'}{h_2}.$$

I tiranti sono pari a $h_1 = (2 + C_{pu}/2)$ m, $h_2 = (8 + C_{pu}/2)$ m. Calcolare:

- la spinta esercitata sulla paratoia;
- il centro di spinta.

◇ Si assuma $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$.

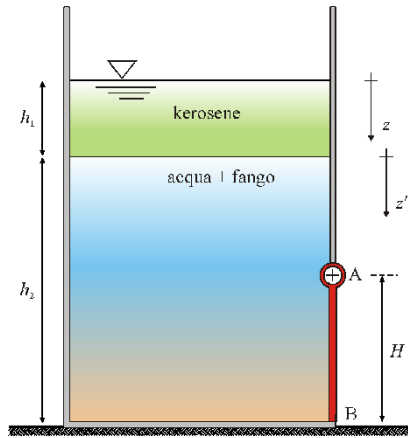


Figura 1.3. Schema del serbatoio contenente fluidi stratificati

Soluzione

La pressione nel kerosene nel punto di affondamento z compreso tra $z = 0$ e $z = h_1$ varia linearmente ed è pari a $p(z) = \gamma_{ker}z \equiv 0.81 \times \gamma_{acqua}z$. All'interfaccia tra kerosene e acqua mista a fango, la pressione è pari a:

$$p(h_1) = \gamma_{ker}h_1.$$

La pressione nell'acqua mista a fango nel punto di affondamento z compreso tra $z = h_1$ e $z = h_1 + h_2$, cioè tra $z' = 0$ e $z' = h_2$, si calcola utilizzando l'equazione

indefinita dell'idrostatica scritta nel sistema di coordinate z' :

$$\frac{dp}{dz'} = \gamma(z') \equiv \gamma_{acqua} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{49} \frac{z'}{h_2} \rightarrow$$

$$\int_{p(0)}^{p(z')} dp = \int_0^{z'} \left[\gamma_{acqua} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{49} \frac{z'}{h_2} \right] dz'.$$

Quindi:

$$p(z') = p(0) + \gamma_{acqua} z' + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{h_2}$$

$$= \gamma_{ker} h_1 + \gamma_{acqua} z' + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{h_2}.$$

La spinta richiesta si calcola integrando sulla superficie della paratoia, di profondità unitaria, le forze elementari associate alla pressione nel fluido:

$$F = \int_{h_2-H}^{h_2} \left[\gamma_{ker} h_1 + \gamma_{acqua} z' + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{h_2} \right] dz' \rightarrow$$

$$F = \gamma_{ker} h_1 z' + \gamma_{acqua} \frac{z'^2}{2} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{294} \frac{z'^3}{h_2} \Big|_{h_2-H}^{h_2} \rightarrow$$

$$F = \gamma_{ker} h_1 H + \gamma_{acqua} \frac{(h_2)^2 - (h_2 - H)^2}{2} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{294} \left[\frac{(h_2)^3}{h_2} - \frac{(h_2 - H)^3}{h_2} \right].$$

Il centro di spinta si calcola imponendo che il momento rispetto ad un asse (ad esempio, l'interfaccia tra i due liquidi) dovuto alla distribuzione di forze elementari, coincida con il momento (calcolato rispetto allo stesso asse) del risultante di dette forze:

$$F \times z'_C = \int_{h_2-H}^{h_2} \left[\gamma_{ker} h_1 + \gamma_{acqua} z' + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{h_2} \right] z' dz' \rightarrow$$

$$z'_C = \frac{\left[\gamma_{ker} h_1 \frac{z'^2}{2} + \gamma_{acqua} \frac{z'^3}{3} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{392} \frac{z'^4}{h_2} \right] \Big|_{h_2-H}^{h_2}}{F} \rightarrow$$

$$z'_C = \frac{\left[\gamma_{ker} h_1 \frac{(h_2)^2}{2} + \gamma_{acqua} \frac{(h_2)^3}{3} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{392} \frac{(h_2)^4}{h_2} \right] - \left[\gamma_{ker} h_1 \frac{(h_2 - H)^2}{2} + \gamma_{acqua} \frac{(h_2 - H)^3}{3} + (1 + C_u) \frac{\gamma_{acqua}}{392} \frac{(h_2 - H)^4}{h_2} \right]}{F}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$\gamma = 9800 + 200 \frac{z'}{h} \text{ N/m}^3, h_1 = 2 \text{ m}, h_2 = 8 \text{ m}, H = 2 \text{ m}.$$

$$p(z') = 15\,876 + 9800z' + 100 \frac{z'^2}{h_2} \text{ Pa } (z', h_2 \text{ in metri})$$

$$F = \gamma_{ker} h_1 H + \gamma_{acqua} \frac{(h_2)^2 - (h_2 - H)^2}{2} + \frac{\gamma_{acqua}}{294} \left[\frac{(h_2)^3}{h_2} - \frac{(h_2 - H)^3}{h_2} \right] \rightarrow$$

$$F = 0.81 \times 9800 \times 2 \times 2 + 9800 \times \frac{[(8)^2 - (8 - 2)^2]}{2} +$$

$$\frac{9800}{294} \times \left[\frac{(8)^3}{8} - \frac{(8 - 2)^3}{8} \right] = 170.2 \text{ kN}$$

$$\left[\gamma_{ker} h_1 \frac{(h_2)^2}{2} + \gamma_{acqua} \frac{(h_2)^3}{3} + \frac{\gamma_{acqua}}{392} \frac{(h_2)^4}{h_2} \right] -$$

$$z'_C = \frac{\left[\gamma_{ker} h_1 \frac{(h_2 - H)^2}{2} + \gamma_{acqua} \frac{(h_2 - H)^3}{3} + \frac{\gamma_{acqua}}{392} \frac{(h_2 - H)^4}{h_2} \right]}{F} \rightarrow$$

$$\left[0.81 \times 9800 \times 2 \times \frac{(8)^2}{2} + 9800 \times \frac{(8)^3}{3} + \frac{9800}{392} \times \frac{(8)^4}{8} \right] -$$

$$z'_C = \frac{\left[0.81 \times 9800 \times 2 \times \frac{(8 - 2)^2}{2} + 9800 \times \frac{(8 - 2)^3}{3} + \frac{9800}{392} \times \frac{(8 - 2)^4}{8} \right]}{170\,200}$$

$$= 7.05 \text{ m}.$$

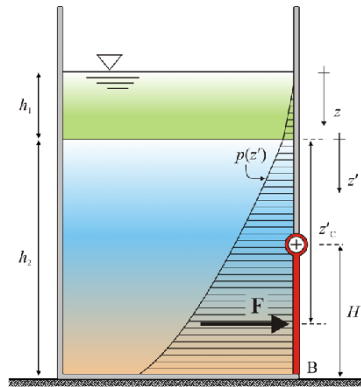


Figura 1.4. Diagramma della pressione

In Figura 1.4 si riporta il diagramma della pressione lungo la verticale. Nel caso in esame, se il fluido fosse stato a densità uniforme il centro di spinta sarebbe risultato più vicino al pelo libero.

Esercizio 1.3

Il serbatoio in Figura 1.5 è separato da un setto inclinato con un'apertura circolare chiusa da una paratoia di diametro $D = (0.50 + C_{pu}/20)$ m. Il manometro differenziale a mercurio legge un dislivello pari a $\Delta h = (0.10 + C_u/10)$ m. Calcolare:

- direzione, verso e modulo della spinta sulla paratoia circolare;
- il centro di spinta.

◇ Si assuma: $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{mercurio}}/\gamma = 13.6$.

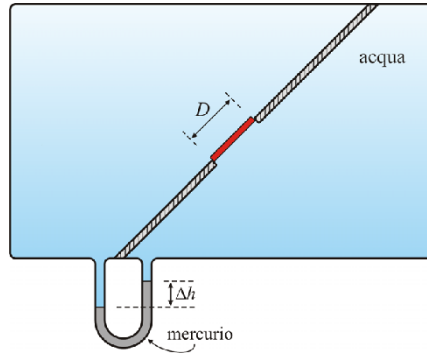


Figura 1.5. Schema del serbatoio

Soluzione

Il piano dei carichi idrostatici del serbatoio a sinistra è a quota superiore rispetto al piano dei carichi idrostatici del serbatoio a destra (Figura 1.6), di una quantità pari a:

$$\delta = \frac{(\gamma_{\text{mercurio}} - \gamma) \Delta h}{\gamma}.$$

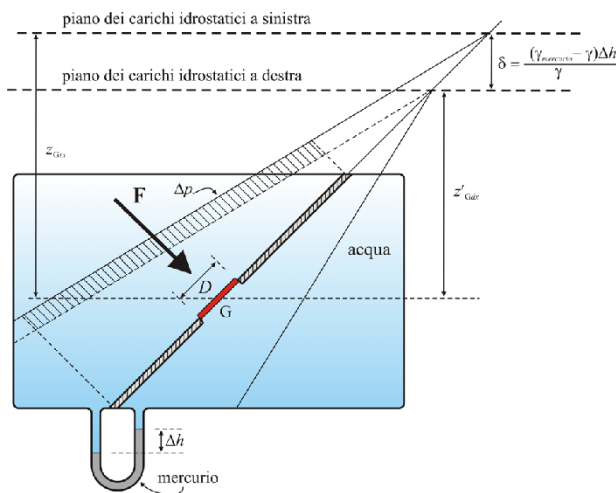


Figura 1.6. Piani dei carichi idrostatici e diagramma della pressione

La spinta esercitata dal fluido a sinistra della paratoia ha direzione ortogonale alla paratoia stessa e ha modulo pari a:

$$F_{sx} = \gamma z_{Gsx} \frac{\pi D^2}{4}$$

e la spinta esercitata dal fluido nel serbatoio a destra, anch'essa ortogonale alla paratoia, ha modulo pari a:

$$F_{dx} = \gamma z'_{Gdx} \frac{\pi D^2}{4}$$

dove z_{Gsx} e z'_{Gdx} sono l'affondamento del baricentro della paratoia rispetto ai piani dei carichi idrostatici del fluido a sinistra e a destra rispettivamente.

La spinta totale ha modulo pari a:

$$F = F_{dx} - F_{sx} = \gamma (z_{Gdx} - z'_{Gsx}) \frac{\pi D^2}{4} = \gamma \delta \frac{\pi D^2}{4} = (\gamma_{mercurio} - \gamma) \Delta h \frac{\pi D^2}{4},$$

è ortogonale alla paratoia circolare ed è applicata nel baricentro della stessa, essendo \mathbf{F} dovuta all'azione di una pressione uniforme originata dalla differenza tra due diagrammi di pressione trapezoidali con inclinazione uguale (vedi Figura 1.6). Pertanto, centro di spinta e baricentro della paratoia coincidono.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$D = 0.50 \text{ m}$, $\Delta h = 0.10 \text{ m}$

$$F = (\gamma_{mercurio} - \gamma) \Delta h \frac{\pi D^2}{4} = (13.6 - 1) \times 9800 \times 0.10 \times \frac{\pi \times 0.5^2}{4} = 2424 \text{ N}.$$

Esercizio 1.4

Nel sistema in Figura 1.7 la paratoia piana, di profondità $L = (2 + C_u/2)$ m, è incernierata in A, a quota $a = (4 + C_{pu})$ m dal fondo orizzontale piano. I due liquidi hanno peso specifico $\gamma_1 = 10\,000$ N/m³ e $\gamma_2 = 12\,000$ N/m³. Il tirante del liquido a sinistra è pari a $h_1 = (3 + C_{pu}/2)$ m. Calcolare:

- la spinta esercitata dal liquido a sinistra;
 - il punto di applicazione di questa spinta;
 - il livello h_2 in corrispondenza del quale la paratoia è in condizione di apertura incipiente.
- ◇ Trascurare il peso della paratoia.

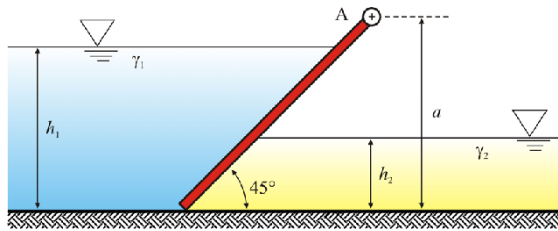


Figura 1.7. Schema della paratoia piana incernierata in A

Soluzione

Con riferimento allo schema riportato in Figura 1.8, la spinta esercitata sulla paratoia piana dal liquido a sinistra è ortogonale alla superficie e ha modulo pari a:

$$S_1 = \gamma_1 \frac{h_1}{2} L h_1 \sqrt{2}$$

ed è applicata a distanza (misurata parallelamente alla traccia della paratoia) pari a $h_1 \frac{\sqrt{2}}{3}$ dal fondo. Il braccio di questa spinta rispetto all'asse della cerniera in A vale:

$$b_1 = \left(a - \frac{h_1}{3} \right) \sqrt{2}.$$

Il liquido a destra della paratoia esercita una spinta ortogonale alla superficie della paratoia con modulo pari a:

$$S_2 = \gamma_2 \frac{h_2}{2} L h_2 \sqrt{2} \text{ se } h_2 \leq a$$

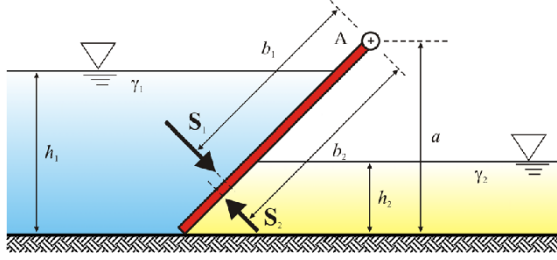


Figura 1.8. Sistema di forze agenti

applicata ad una distanza (misurata parallelamente alla traccia della paratoia) pari a $h_2 \frac{\sqrt{2}}{3}$ dal fondo. Il braccio di questa spinta rispetto all'asse della cerniera in A vale:

$$b_2 = \left(a - \frac{h_2}{3} \right) \sqrt{2}.$$

Imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse di traccia A, in condizioni di incipiente rotazione (reazione di appoggio al fondo nulla), risulta:

$$S_1 b_1 = S_2 b_2 \rightarrow \gamma_1 \frac{h_1}{2} L h_1 \sqrt{2} \left(a - \frac{h_1}{3} \right) \sqrt{2} = \gamma_2 \frac{h_2}{2} L h_2 \sqrt{2} \left(a - \frac{h_2}{3} \right) \sqrt{2}.$$

È necessario risolvere la seguente equazione di 3° grado nella variabile h_2 :

$$h_2^3 - 3ah_2^2 + 3\frac{\gamma_1}{\gamma_2}h_1^2 \left(a - \frac{h_1}{3} \right) = 0$$

che ammette sempre almeno una soluzione reale. Si dimostra elementarmente che se $h_1 < a$ e $\gamma_1 < \gamma_2$, risulta anche $h_2 < h_1 < a$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$L = 2 \text{ m}, a = 4 \text{ m}, h_1 = 3 \text{ m}$$

$$S_1 = \gamma_1 \frac{h_1}{2} L h_1 \sqrt{2} = 10\,000 \times \frac{3}{2} \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 127.3 \text{ kN}$$

$$b_1 = \left(a - \frac{h_1}{3} \right) \sqrt{2} = \left(4 - \frac{3}{3} \right) \times \sqrt{2} = 4.24 \text{ m}.$$

L'equazione risolvente è:

$$h_2^3 - 3ah_2^2 + 3\frac{\gamma_1}{\gamma_2}h_1^2 \left(a - \frac{h_1}{3} \right) = 0 \rightarrow$$

$$h_2^3 - 3 \times 4h_2^2 + 3 \times \frac{10\,000}{12\,000} \times 3^2 \times \left(4 - \frac{3}{3} \right) = 0 \rightarrow h_2^3 - 12h_2^2 + 67.5 = 0.$$

La soluzione può essere individuata con un procedimento numerico per tentativi, oppure applicando la complessa formula analitica di soluzione per le equazioni algebriche di 3° grado (dovuta a Cardano, 1501–1576), mediante la quale si individuano le tre soluzioni seguenti:

$$\begin{aligned}h_2 &= 2.69 \text{ m} \\h_2 &= 11.49 \text{ m} \\h_2 &= -2.19 \text{ m}\end{aligned}$$

delle quali solo la prima è accettabile.

Esercizio 1.5

Nel sistema in Figura 1.9 una paratoia rettangolare di lunghezza L e profondità $b = 3 \text{ m}$ (quest'ultima dimensione ortogonale al piano del foglio) incernierata superiormente divide due vasche. Il tirante idrico nella vasca a sinistra è pari a $h = (2 + C_u/20) \text{ m}$ e la paratoia pesa $P = (6 + C_{pu}/20) \times 10^4 \text{ N}$.

- Calcolare la spinta esercitata sulla paratoia dall'acqua nella vasca a sinistra.
- Calcolare il punto di applicazione della spinta.
- Determinare la massima altezza dell'acqua nella vasca a destra affinché la paratoia, incernierata superiormente, non si apra.

◇ Si assuma $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$.

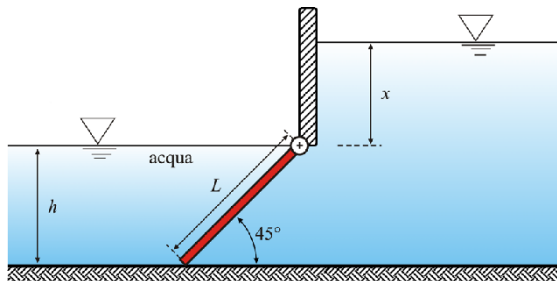


Figura 1.9. Schema del serbatoio e della paratoia incernierata superiormente

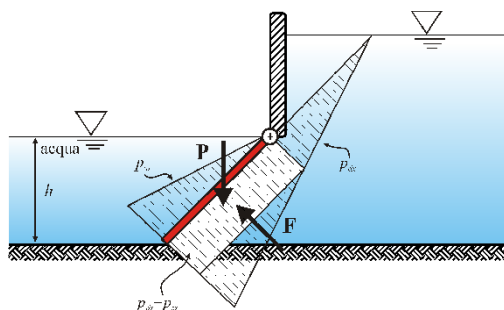


Figura 1.10. Sistema di forze agenti sulla paratoia e diagramma della pressione

Soluzione

La spinta esercitata sulla paratoia dall'acqua nella vasca a sinistra è ortogonale alla paratoia e ha modulo pari a:

$$F_{sx} = \gamma \frac{h}{2} bL$$

in cui L è la lunghezza della paratoia pari a:

$$L = h\sqrt{2}$$

ed è applicata a distanza $L/3$ lungo la paratoia a partire dal fondo.

Sulla base della geometria della paratoia, il sistema di forze agenti è riconducibile a quanto riportato in Figura 1.10.

Considerando l'insieme delle azioni idrostatiche dovute all'acqua nelle vasche di sinistra e di destra, si può osservare che sulla paratoia insistono:

- da sinistra, una pressione con diagramma triangolare;
- da destra, una pressione con diagramma trapezoidale.

Dato che il liquido è lo stesso per le due vasche, la pendenza dei due diagrammi è la medesima e poiché il verso delle forze elementari dovute alle pressioni è opposto, sulla paratoia agisce solo la parte rettangolare del diagramma delle pressioni, con verso da destra verso sinistra. La paratoia è sottoposta, in definitiva, all'azione di una pressione uniforme e di valore pari a γx e che agisce in modo da sollecitare una rotazione intorno alla cerniera in senso orario.

Imponendo l'equazione di equilibrio dei momenti risulta:

$$\gamma x b L \frac{L}{2} = P \frac{h}{2}.$$

La massima altezza d'acqua affinché la paratoia non si apra risulta, quindi:

$$x \leq \frac{Ph}{\gamma b L^2}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$b = 3 \text{ m}, h = 2 \text{ m}, P = 6 \times 10^4 \text{ N}$$

$$L = h\sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} = 2.83 \text{ m}$$

$$F_{sx} = \gamma \frac{h}{2} b L = 9800 \times \frac{2}{2} \times 3 \times 2.83 = 83.2 \text{ kN}$$

$$x \leq \frac{Ph}{\gamma b L^2} \equiv \frac{6 \times 10^4 \times 2}{9800 \times 3 \times 2.83^2} = 0.51 \text{ m}.$$

Esercizio 1.6

Nel sistema in Figura 1.11 una paratoia incernierata superiormente, di profondità $b = 2.0 \text{ m}$, divide due vasche. Il tirante nella vasca a destra è pari a $h_2 = (2 + C_u/20) \text{ m}$ e la paratoia pesa $P = (6 + C_{pu}/20) \times 10^4 \text{ N}$. L'altezza della luce è $a = (1 + C_u/10) \text{ m}$.

- Calcolare la spinta esercitata sulla paratoia dall'olio nella vasca a destra.
- Calcolare il punto di applicazione della spinta dovuta all'olio nella vasca a destra.
- Determinare il valore minimo dell'altezza d'acqua nella vasca a sinistra affinché la paratoia, incernierata superiormente, non si apra.

◇ Si assuma $\gamma_{acqua} = 9806 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{olio} = 0.8 \times 9806 \text{ N/m}^3$.

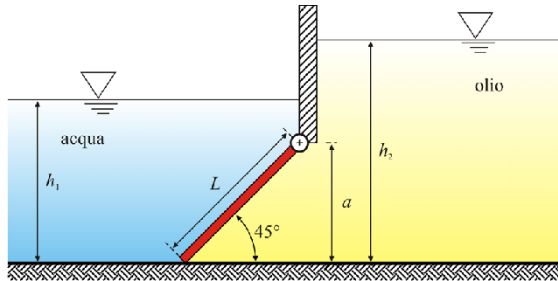


Figura 1.11. Schema della paratoia piana e del serbatoio

Soluzione

Con riferimento allo schema riportato in Figura 1.12, la spinta esercitata sulla paratoia dall'olio nella vasca a destra è ortogonale alla paratoia stessa e ha modulo

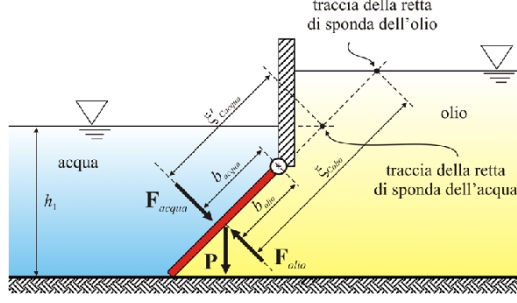


Figura 1.12. Sistema di forze agenti sulla paratoia incernierata superiormente

pari a:

$$F_{olio} = \gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL \quad (\text{nel caso in studio, risulta } h_2 > a \text{ sempre}).$$

L è la lunghezza della paratoia, pari a:

$$L = a\sqrt{2}.$$

Il punto di applicazione di F_{olio} , misurato lungo la traccia della paratoia a partire dal pelo libero dell'olio, si calcola come segue:

$$\xi_{Colio} = \xi_{Golio} + \frac{I_{Gxx}}{S_x} \equiv \left(h_2\sqrt{2} - L/2 \right) + \frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_2\sqrt{2} - L/2)}$$

in cui I_{Gxx} è il momento d'inerzia baricentrico della paratoia e S_x è il momento statico della stessa rispetto alla retta di sponda dell'olio. Se il risultante dei momenti dovuti alla spinta dell'olio e al peso della paratoia, calcolato rispetto all'asse della cerniera, è antiorario, la paratoia non si aprirà anche nel caso in cui sia $h_1 = 0$.

Tale condizione di stabilità alla rotazione della paratoia (indipendente, quindi, dal valore di h_1) è la seguente:

$$F_{olio}b_{olio} - P\frac{a}{2} < 0.$$

b_{olio} è il braccio della spinta dell'olio rispetto alla cerniera, pari a:

$$b_{olio} = \xi_{Colio} - (h_2\sqrt{2} - L) \equiv \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right]$$

(nel nostro caso, risulta $h_2 > a$ sempre)

mentre $a/2$ è il braccio della forza peso della paratoia.

Sostituendo, la condizione diventa:

$$\gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right] - P\frac{a}{2} < 0.$$

Se tale ultima condizione non è soddisfatta, il tirante d'acqua minimo necessario per evitare l'apertura della paratoia si calcola imponendo che il momento risultante di tutte le forze rispetto all'asse della cerniera sia nullo.

Scelto un sistema di coordinate con momento positivo in verso orario, la condizione di equilibrio alla rotazione è la seguente:

$$F_{olio}b_{olio} - F_{acqua}b_{acqua} - P\frac{a}{2} = 0.$$

La spinta esercitata dall'acqua, nella vasca a sinistra, è ortogonale alla paratoia e ha modulo pari a:

$$\begin{aligned} F_{acqua} &= \gamma_{acqua} (h_1 - a/2) bL \equiv \gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{2} (h_1\sqrt{2} - L/2) bL \quad \text{se } h_1 \geq a \\ F_{acqua} &= \gamma_{acqua} \frac{h_1^2\sqrt{2}}{2} b \quad \text{se } h_1 < a. \end{aligned}$$

Tale spinta è applicata alla distanza *dal pelo libero dell'acqua*, misurata lungo la traccia della paratoia, pari a:

$$\begin{aligned} \xi'_{Cacqua} &= \xi'_{Gacqua} + \frac{I'_{Gxx}}{S'_x} \equiv (h_1\sqrt{2} - L/2) + \frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_1\sqrt{2} - L/2)} \quad \text{se } h_1 \geq a \\ \xi'_{Cacqua} &= \frac{2}{3}h_1\sqrt{2} \quad \text{se } h_1 < a \end{aligned}$$

in cui I'_{Gxx} è il momento d'inerzia baricentrico della paratoia e S'_x è il momento statico della stessa rispetto alla *retta di sponda dell'acqua*. Il braccio della spinta esercitata dall'acqua, rispetto all'asse della cerniera, è pari a:

$$\begin{aligned} b_{acqua} &= \xi'_{Cacqua} - (h_1\sqrt{2} - L) \quad \text{se } h_1 \geq a \\ b_{acqua} &= \frac{2}{3}h_1\sqrt{2} + (L - h_1\sqrt{2}) \quad \text{se } h_1 < a. \end{aligned}$$

La condizione di equilibrio alla rotazione è la seguente:

$$\begin{aligned} \gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right] - \\ \gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{2} (h_1\sqrt{2} - L/2) bL \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_1\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right] - P\frac{a}{2} &\leq 0 \quad \text{se } h_1 \geq a \\ \gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL(h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right] - \\ \gamma_{acqua} \frac{h_1^2\sqrt{2}}{2} b \left[\frac{2}{3}h_1\sqrt{2} + (L - h_1\sqrt{2}) \right] - P\frac{a}{2} &\leq 0 \quad \text{se } h_1 < a. \end{aligned}$$

Nel primo caso ($h_1 \geq a$), con la sostituzione $x = (h_1\sqrt{2} - L/2)$ risulta:

$$\underbrace{\gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL \left[\frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL (h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2} \right]}_{M_{olio}} - \quad \text{se } h_1 \geq a$$

$$\gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{24} bL^3 - \gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{4} x bL^2 - P \frac{a}{2} \leq 0$$

e, quindi:

$$x \geq \frac{M_{olio} - P \frac{a}{2} - \gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{24} bL^3}{\gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{4} bL^2}$$

da cui si calcola:

$$h_1 \geq \frac{L}{2\sqrt{2}} + \frac{M_{olio} - P \frac{a}{2} - \gamma_{acqua} \frac{\sqrt{2}}{24} bL^3}{\gamma_{acqua} \frac{1}{2} bL^2}.$$

Nel secondo caso ($h_1 < a$), si ottiene un'equazione di terzo grado che ammette sempre una soluzione reale positiva, purché risulti:

$$F_{olio} b_{olio} - P \frac{a}{2} \geq 0.$$

Si noti che questa condizione coincide con la condizione di dipendenza dell'equilibrio alla rotazione dal livello idrico h_1 discussa all'inizio dell'esercizio.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$b = 2.0$ m, $h_2 = 2$ m, $P = 6 \times 10^4$ N, $a = 1$ m, $\gamma_{acqua} = 9806$ N/m³, $\gamma_{olio} = 7845$ N/m³

$$L = a\sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = 1.41 \text{ m}$$

$$F_{olio} = \gamma_{olio} (h_2 - a/2) bL = 7845 \times (2 - 1/2) \times 2 \times 1 \times \sqrt{2} = 33.28 \text{ kN}$$

$$b_{olio} = \frac{\frac{1}{12}bL^3}{bL (h_2\sqrt{2} - L/2)} + \frac{L}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{12} \times 2 \times (1 \times \sqrt{2})^3}{2 \times 1 \times \sqrt{2} \times (2 \times \sqrt{2} - 1 \times \sqrt{2}/2)} + \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = 0.78 \text{ m}$$

$$F_{olio} b_{olio} - P \frac{a}{2} \rightarrow 33\,280 \times 0.78 - 6 \times 10^4 \times \frac{1}{2} < 0.$$

Quindi, la paratoia è sempre stabilmente chiusa, anche per $h_1 = 0$.

Esercizio 1.7

Nel serbatoio in Figura 1.13 una paratoia rettangolare di traccia \overline{AB} separa due liquidi di peso specifico $\gamma_1 = 8000 \text{ N/m}^3$ e $\gamma_2 = 9800 \text{ N/m}^3$. I tiranti sono pari a $h_1 = 3.5 \text{ m}$ e $h_2 = 4.5 \text{ m}$. L'altezza della paratoia rettangolare è $H = 1.5 \text{ m}$. Calcolare:

- il modulo della spinta per unità di profondità che agisce sulla paratoia \overline{AB} ;
- la retta d'azione della spinta.

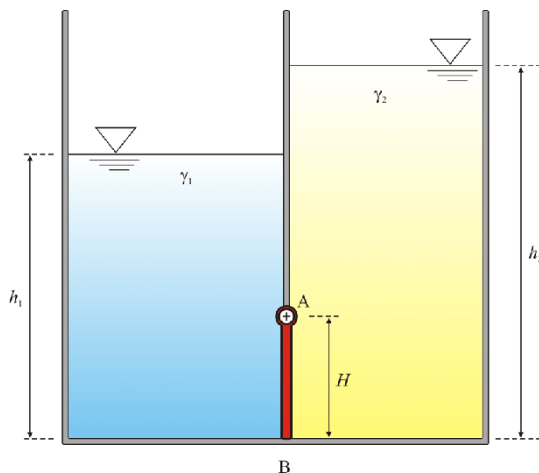


Figura 1.13. Schema del serbatoio e della paratoia piana incernierata in A

Soluzione

Con riferimento allo schema riportato in Figura 1.14, il fluido 1 (a sinistra della paratoia) esercita una spinta orizzontale verso destra per unità di profondità pari a:

$$F_1 = \gamma_1 (h_1 - H/2) H = 8000 \times (3.5 - 1.5/2) \times 1.5 = 33.0 \text{ kN}$$

applicata a una distanza dal pelo libero del fluido 1 pari a:

$$z_{C1} = z_{G1} + \frac{I_{G1xx}}{S_x} = \left(h_1 - \frac{H}{2} \right) + \frac{\frac{1}{12} H^3}{H (h_1 - H/2)} =$$

$$(3.5 - 1.5/2) + \frac{\frac{1}{12} \times 1.5^3}{1.5 \times (3.5 - 1.5/2)} = 2.82 \text{ m.}$$

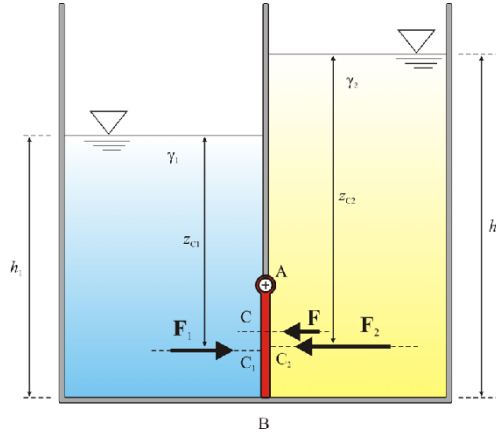


Figura 1.14. Schema di calcolo delle spinte e dei centri di spinta

Il fluido 2 (a destra della paratoia) esercita una spinta orizzontale verso sinistra pari a:

$$F_2 = -\gamma_2 (h_2 - H/2) H = -9800 \times (4.5 - 1.5/2) \times 1.5 = -55.1 \text{ kN}$$

applicata a una distanza dal pelo libero del fluido 2 pari a:

$$z_{C2} = z_{G2} + \frac{I_{G2x'x'}}{S_{x'}} = \left(h_2 - \frac{H}{2} \right) + \frac{\frac{1}{12} H^3}{H (h_2 - H/2)} =$$

$$(4.5 - 1.5/2) + \frac{\frac{1}{12} \times 1.5^3}{1.5 \times (4.5 - 1.5/2)} = 3.80 \text{ m.}$$

La spinta risultante è diretta verso sinistra ed è pari a:

$$F = F_1 + F_2 = 33\,000 - 55\,125 = -22.1 \text{ kN.}$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse di traccia A, risulta:

$$F_1 \times \overline{AC_1} + F_2 \times \overline{AC_2} = F \times \overline{AC} \rightarrow \overline{AC} = \frac{F_1 \times \overline{AC_1} + F_2 \times \overline{AC_2}}{F}$$

in cui $\overline{AC_1}$, $\overline{AC_2}$ e \overline{AC} sono i bracci delle spinte esercitate dai due liquidi e della spinta risultante rispetto alla cerniera in A (Figura 1.14). Si ha, in particolare $\overline{AC_1} = z_{C1} - (h_1 - H)$ e $\overline{AC_2} = z_{C2} - (h_2 - H)$. Quindi:

$$\overline{AC} = \frac{33.0 \times (2.82 - 3.5 + 1.5) - 55.1 \times (3.80 - 4.5 + 1.5)}{-22.1} = 0.77 \text{ m.}$$

Esercizio 1.8

Nel sistema in Figura 1.15 la paratoia piana, di profondità unitaria, è incernierata in A e giace su un piano inclinato di un angolo $\alpha = (45 + C_{pu})^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il fluido superiore è olio, il fluido inferiore, costituito da acqua e fango, ha peso specifico crescente verso il basso con la seguente legge:

$$\gamma = \gamma_{acqua} + \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'}{b}.$$

Calcolare:

- la spinta totale esercitata dall'acqua e fango e dall'olio sulla paratoia;
 - il punto di applicazione della spinta.
- ◇ Si assuma $a = (2 + C_u/10)$ m, $b = (4 + C_{pu}/10)$ m, $h_{olio} = (2.5 + C_u/10)$ m, $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{olio} = 0.8 \times \gamma_{acqua}$.

Si precisa che la cerniera A è ad una quota superiore al piano di separazione tra olio e acqua + fango.

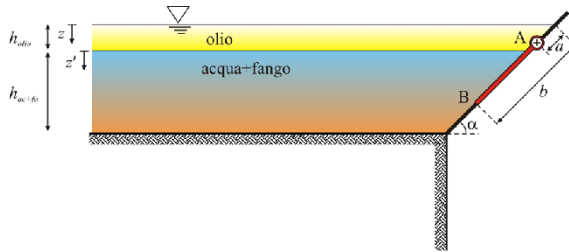


Figura 1.15. Schema della paratoia piana soggetta alla spinta di fluidi stratificati

Soluzione

In aggiunta ai sistemi di coordinate z e z' , con origine rispettivamente sul pelo libero e all'interfaccia tra olio e acqua + fango, è conveniente introdurre i due nuovi sistemi di coordinate Ox e $O'x'$ riportati in Figura 1.16.

La pressione nell'olio nel punto di affondamento z compreso tra $z = 0$ e $z = h_{olio}$ varia linearmente e, nel sistema di coordinate z , è pari a $p = \gamma_{olio} \times z = 0.8 \times \gamma_{acqua} \times z$.

Invece nel sistema di coordinate Ox , nell'olio ($0 < x < h_{olio}/\sin \alpha$), risulta:

$$p(x) = (\gamma_{olio} \sin \alpha) x.$$

La pressione nel fluido acqua + fango nel punto di affondamento z compreso tra $z = h_{olio}$ e $z = h_{olio} + z'$ si calcola integrando l'equazione indefinita dell'idrostatica.

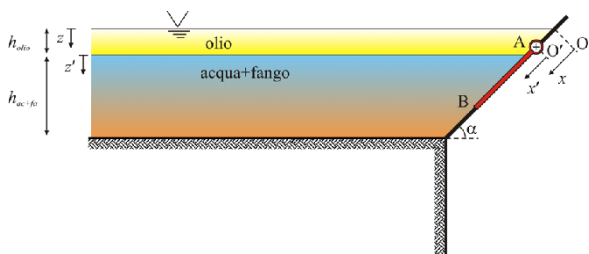


Figura 1.16. Sistemi di coordinate usati per il calcolo delle spinte

Nel sistema di coordinate z' , risulta:

$$\frac{dp}{dz'} = \gamma(z') \equiv \gamma_{acqua} + \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'}{b} \rightarrow \int_{p(0)}^{p(z')} dp = \int_0^{z'} \left(\gamma_{acqua} + \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'}{b} \right) dz' \rightarrow$$

$$p(z') = p(0) + \gamma_{acqua} z' + \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{2b} = \gamma_{olio} h_{olio} + \gamma_{acqua} z' + \frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{z'^2}{2b}.$$

Invece, nel sistema di coordinate $O'x'$, sempre nel dominio occupato dalla miscela di acqua e fango, risulta:

$$p(x') = \gamma_{olio} h_{olio} + (\gamma_{acqua} \sin \alpha) x' + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \sin^2 \alpha \right) \frac{x'^2}{2b}.$$

Il diagramma qualitativo della pressione agente sulla paratoia piana è riportato in Figura 1.17. La spinta si calcola integrando sulla superficie della paratoia, di profondità unitaria, le forze elementari associate alla pressione (il dominio di integrazione è la zona campita in grigio in Figura 1.17), separando l'integrale nei due contributi dovuti all'olio e alla miscela acqua + fango:

$$F_1 = \int_a^{\frac{h_{olio}}{\sin \alpha}} (\gamma_{olio} \sin \alpha) x dx \rightarrow F_1 = \frac{\gamma_{olio}}{2} \sin \alpha \left(\frac{h_{olio}^2}{\sin^2 \alpha} - a^2 \right) \quad (\text{integrazione in } O'x')$$

$$F_2 = \int_0^c \left[\gamma_{olio} h_{olio} + (\gamma_{acqua} \sin \alpha) x' + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \sin^2 \alpha \right) \frac{x'^2}{2b} \right] dx' \\ \rightarrow F_2 = (\gamma_{olio} h_{olio}) c + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{2} \sin \alpha \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98b} \sin^2 \alpha \right) \frac{c^3}{6} \quad (\text{integrazione in } O'x')$$

dove $c = b - h_{olio}/\sin \alpha$ rappresenta la lunghezza della paratoia lambita dalla miscela di acqua e fango.

Il centro di spinta si calcola imponendo che il momento rispetto ad un asse (ad esempio, l'asse ortogonale al foglio e passante per la retta di sponda relativamente

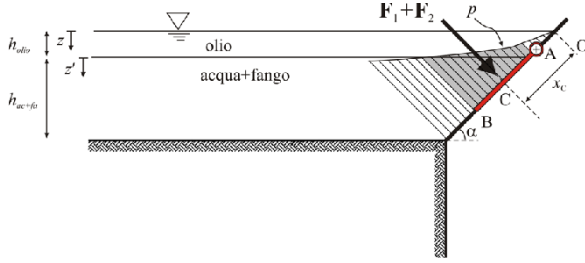


Figura 1.17. Diagramma della pressione agente sulla paratoia piana

all'olio) dovuto alla distribuzione di forze, coincida con il momento (calcolato rispetto allo stesso asse) del risultante di dette forze. Le due forze esercitano, rispetto all'asse definito in precedenza, due coppie antiorarie e rispettivamente pari a:

$$M_1 = \int_a^{\frac{h_{olio}}{\sin \alpha}} (\gamma_{olio} \sin \alpha) x^2 dx \rightarrow M_1 = \frac{\gamma_{olio}}{3} \sin \alpha \left(\frac{h_{olio}^3}{\sin^3 \alpha} - a^3 \right)$$

(integrazione in Ox)

e

$$M_2 = \int_0^c \left[\gamma_{olio} h_{olio} + (\gamma_{acqua} \sin \alpha) x' + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \sin^2 \alpha \right) \frac{x'^2}{2b} \right] \left(\frac{h_{olio}}{\sin \alpha} + x' \right) dx' \rightarrow$$

$$M_2 = \left[(\gamma_{olio} h_{olio}) c + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{2} \sin \alpha \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{1}{6b} \sin^2 \alpha \right) c^3 \right] \frac{h_{olio}}{\sin \alpha}$$

$$+ \left(\frac{\gamma_{olio}}{2} h_{olio} \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{3} \sin \alpha \right) c^3 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{1}{8b} \sin^2 \alpha \right) c^4$$

$$= F_2 \frac{h_{olio}}{\sin \alpha} + \left(\frac{\gamma_{olio}}{2} h_{olio} \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{3} \sin \alpha \right) c^3 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{1}{8b} \sin^2 \alpha \right) c^4$$

(integrazione in $O'x'$).

Imponendo il bilancio dei momenti, risulta:

$$(F_1 + F_2) x_C = M_1 + M_2 \rightarrow x_C = \frac{M_1 + M_2}{F_1 + F_2}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$\alpha = 45^\circ, a = 2 \text{ m}, b = 4 \text{ m}, h_{olio} = 2.5 \text{ m}, \gamma_{olio} = 7840 \text{ N/m}^3$$

$$c = b - \frac{h_{olio}}{\sin \alpha} = 4 - \frac{2.5}{\sin 45^\circ} = 0.46 \text{ m}$$

$$\gamma = 9800 + 25z' \text{ N/m}^3 \quad (z' \text{ in metri})$$

$$p(x) = (\gamma_{olio} \sin \alpha) x = 5543.7x \text{ Pa} \quad (x \text{ in metri})$$

$$p(x') = 7840h_{olio} + (9800 \sin \alpha) x' + (100 \sin^2 \alpha) \frac{x'^2}{2b}$$

$$x = 19\,600 + 6930x' + 6.25x'^2 \text{ Pa } (x' \text{ in metri})$$

$$F_1 = \frac{\gamma_{olio}}{2} \sin \alpha \left(\frac{h_{olio}^2}{\sin^2 \alpha} - a^2 \right) = \frac{7840}{2} \times \sin 45^\circ \times \left(\frac{2.5^2}{\sin^2 45^\circ} - 2^2 \right) = 23\,560 \text{ N}$$

$$F_2 = (\gamma_{olio}h_{olio})c + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{2} \sin \alpha \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98b} \sin^2 \alpha \right) \frac{c^3}{6}$$

$$= (7840 \times 2.5) \times 0.46 + \left(\frac{9800}{2} \times \sin 45^\circ \right) \times 0.46^2$$

$$+ \left(\frac{9800}{98 \times 4} \times \sin^2 45^\circ \right) \times \frac{0.46^3}{6}$$

$$= 7949 \text{ N}$$

$$M_1 = \frac{\gamma_{olio}}{3} \sin \alpha \left(\frac{h_{olio}^3}{\sin^3 \alpha} - a^3 \right) = \frac{7840}{3} \times \sin 45^\circ \times \left(\frac{2.5^3}{\sin^3 45^\circ} - 2^3 \right) = 66\,883 \text{ Nm}$$

$$M_2 = F_2 \frac{h_{olio}}{\sin \alpha} + \left(\frac{\gamma_{olio}}{2} h_{olio} \right) c^2 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{3} \sin \alpha \right) c^3 + \left(\frac{\gamma_{acqua}}{98} \frac{1}{8b} \sin^2 \alpha \right) c^4$$

$$= 9749 \times \frac{2.5}{\sin 45^\circ} + \left(\frac{7840}{2} \times 2.5 \right) \times 0.46^2 + \left(\frac{9800}{3} \times \sin 45^\circ \right) \times 0.46^3$$

$$+ \left(\frac{9800}{98} \times \frac{1}{8 \times 4} \times \sin^2 45^\circ \right) \times 0.46^4$$

$$= 36\,768 \text{ Nm}$$

$$x_C = \frac{M_1 + M_2}{F_1 + F_2} = \frac{66\,880 + 36\,768}{23\,560 + 9851} = 3.11 \text{ m.}$$

Esercizio 1.9

Una paratoia di massa $M = 2000 \text{ kg}$ è incernierata lungo il lato inferiore (cerniera in A in Figura 1.18). La profondità della paratoia nella direzione ortogonale al disegno è $l = 8 \text{ m}$.

- Calcolare la dimensione b della paratoia se il sistema è in equilibrio nella configurazione riportata in Figura 1.18.

◇ Il liquido è acqua di peso specifico $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$.

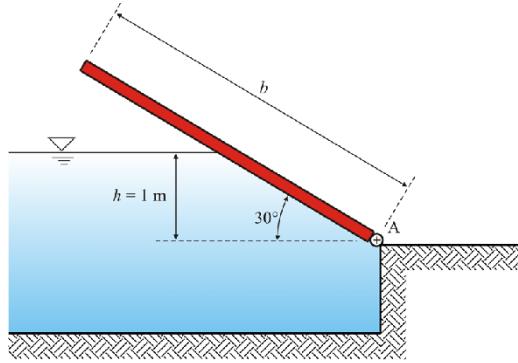


Figura 1.18. Schema della paratoia piana incernierata in A

Soluzione

Consideriamo lo schema in Figura 1.19. Sulla paratoia agisce la forza peso \mathbf{P} e la spinta del fluido \mathbf{S} . Se il sistema è in equilibrio alla rotazione, la coppia risultante rispetto all'asse della cerniera A è nulla, cioè:

$$\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_P = \mathbf{0}.$$

La coppia \mathbf{M}_S è oraria e ha modulo pari a:

$$|\mathbf{M}_S| = Sb_S.$$

S è il modulo della spinta dell'acqua, b_S è il braccio d'azione.

La coppia \mathbf{M}_P è antioraria ed è dovuta al peso $P = Mg$ agente con un braccio pari a $b_P = (b/2) \cos 30^\circ$.

All'equilibrio, risulta:

$$Sb_S = Mgb_P \rightarrow Sb_S = Mg \frac{b}{2} \cos 30^\circ \rightarrow b = \frac{2Sb_S}{\cos 30^\circ Mg}.$$

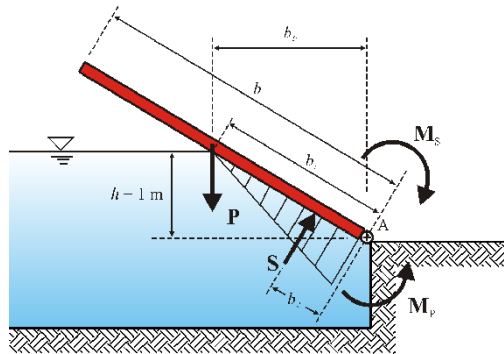


Figura 1.19. Schema delle forze agenti e dei momenti

La porzione di paratoia a contatto con l'acqua ha lunghezza:

$$b_i = h / \sin(30^\circ) = 2 \text{ m.}$$

Il modulo della spinta esercitata dall'acqua è pari a:

$$S = \gamma z_G b_i l = 9806 \times 0.5 \times 2 \times 8 = 78\,448 \text{ N}$$

(z_G è l'affondamento del baricentro della porzione di paratoia immersa).

Il braccio d'azione rispetto all'asse della cerniera è pari a:

$$b_S = b_i / 3 \simeq 66 \text{ cm.}$$

Quindi:

$$b = \frac{2Sb_S}{\cos 30^\circ Mg} = \frac{2 \times 78\,448 \times 0.66}{\cos 30^\circ \times 2000 \times 9.806} = 6.15 \text{ m.}$$

Esercizio 1.10

La cassaforma per la scala in Figura 1.20 è riempita con calcestruzzo fluido di peso specifico relativo all'acqua pari a 2.4. Il peso proprio della cassaforma utile ai fini dell'equilibrio è pari a 370 N. Il gradino è largo $l = 0.90 \text{ m}$.

- Calcolare la zavorra necessaria per tenere in posizione la cassaforma assumendo che l'equilibrio alla rotazione sia sempre garantito.

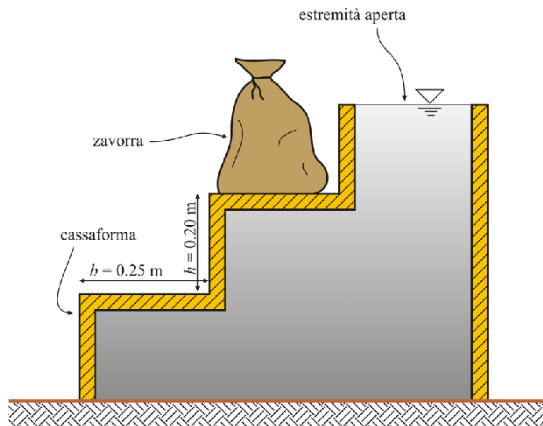


Figura 1.20. Schema della cassaforma zavorrata contenente calcestruzzo fluido

Soluzione

La spinta in direzione verticale sulla cassaforma si calcola come prodotto della pressione che agisce sul cassero che delimita le pedate dei gradini per l'area della superficie delle pedate stesse. Con riferimento allo schema in Figura 1.21, risulta:

$$p_1 = \gamma_{cls} 2h, \quad p_2 = \gamma_{cls} h.$$

Quindi:

$$F_{1z} = -p_1 bl = -\gamma_{cls} 2hbl$$

e

$$F_{2z} = -p_2 bl = -\gamma_{cls} hbl.$$

La condizione di equilibrio alla traslazione verticale è la seguente:

$$P_{zav} + P_{cas} + F_{1z} + F_{2z} = 0 \rightarrow P_{zav} = -F_{1z} - F_{2z} - P_{cas}.$$

Sulla base dei dati forniti, risulta:

$$P_{cas} = 370 \text{ N}$$

$$F_{1z} = -\gamma_{cls} 2hbl = -2.4 \times 1000 \times 9.806 \times 2 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.9 = -2118 \text{ N}$$

$$F_{2z} = -\gamma_{cls} hbl = -2.4 \times 1000 \times 9.806 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.9 = -1059 \text{ N}$$

$$P_{zav} = -F_{1z} - F_{2z} - P_{cas} = 2118 + 1059 - 370 = 2807 \text{ N}.$$

In alternativa, possiamo applicare un metodo globale, valido per superfici non necessariamente piane. Scelto il volume di controllo tratteggiato in Figura 1.22, la condizione di equilibrio alla traslazione è la seguente:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 = \mathbf{0}.$$

Il significato fisico delle varie forze è rappresentato in Figura 1.23.

In termini di pressione relativa, risulta $\mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{0}$. Inoltre:

$$\mathbf{\Pi}_{2z} = -3p_f bl.$$

p_f = pressione al fondo

b = profondità della battuta

l = larghezza del gradino

$$G = P_{cls} = \gamma_{cls} 6bhl$$

$$\mathbf{\Pi}_{0z} = P_{zav} + P_{cas}.$$

Quindi:

$$P_{cls} + P_{zav} + P_{cas} - 3p_f bl = 0 \rightarrow P_{zav} = -P_{cls} - P_{cas} + 3p_f bl.$$

Sulla base dei dati forniti, risulta:

$$P_{cls} = \gamma_{cls} 6bhl = 2.4 \times 1000 \times 9.806 \times 6 \times 0.25 \times 0.20 \times 0.9 = 6354 \text{ N}$$

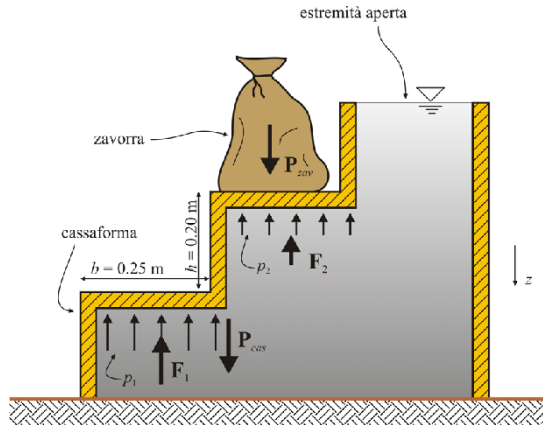


Figura 1.21. Schema delle pressioni e delle forze verticali agenti sulla cassaforma

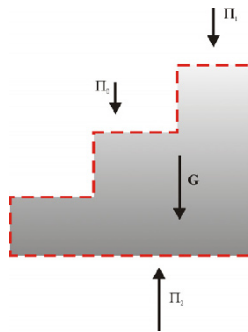


Figura 1.22. Volume di controllo per l'applicazione del metodo globale

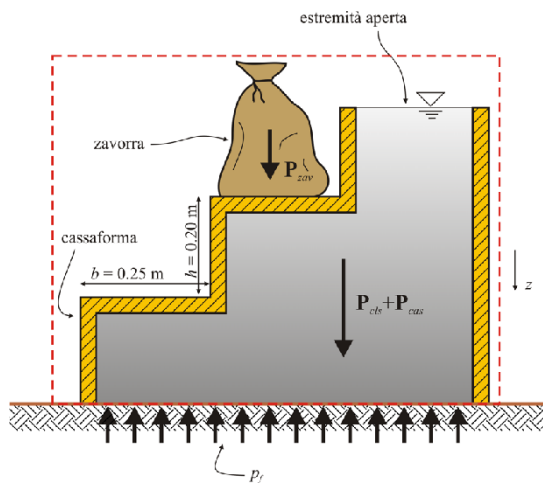


Figura 1.23. Schema delle forze descritte nel metodo globale

$$P_{cas} = 370 \text{ N}$$

$$p_f = 3\gamma_{cls}h = 3 \times 2.4 \times 1000 \times 9.806 \times 0.20 = 14\,120 \text{ Pa.}$$

Quindi:

$$P_{zav} = -P_{cls} - P_{cas} + 3p_fbl = -6354 - 370 + 3 \times 14\,120 \times 0.25 \times 0.9 = 2807 \text{ N.}$$

Ovviamente, i risultati ottenuti con i due metodi sono coincidenti. Si noti che Π_0 avrà solo componente verticale, poiché non esiste alcuna azione orizzontale da equilibrare.

Spinta su superfici curve

Esercizio 2.1

La paratoia cilindrica AC in Figura 2.1, di profondità L , è incernierata in C e mantenuta in equilibrio dalla forza orizzontale \mathbf{F} applicata in A che contrasta l'azione di spinta dell'acqua e dell'olio in sinistra. Essendo noto il peso specifico dei liquidi, le dimensioni della paratoia e il tirante dell'acqua e dell'olio (pari a $D/2$), si determini il modulo della forza orizzontale \mathbf{F} da applicare in A per mantenere in equilibrio la paratoia. (La curva AC è una semicirconferenza di diametro D).

◇ Dati numerici: $D = (3 + 0.2 \times C_u)$ m, $L = (4 + 0.1 \times C_{pu})$ m, $\gamma_{acqua} = 9806 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{olio} = 0.8 \times \gamma_{acqua}$.

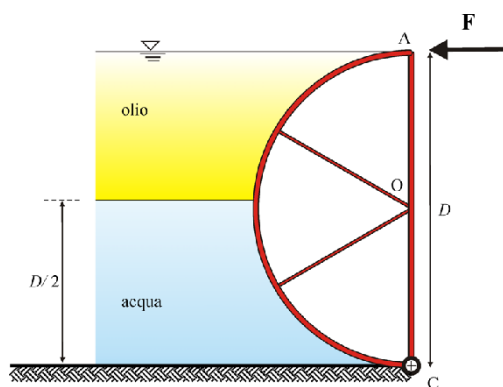


Figura 2.1. Paratoia cilindrica soggetta alla spinta di olio e acqua

Soluzione

La cerniera cilindrica è in grado di sviluppare una qualunque reazione vincolare passante per l'asse di traccia C (perpendicolare al foglio), ma non è in grado di sviluppare coppie resistenti parallele al suo asse. Pertanto, il sistema di forze agenti (idrostatiche ed esterne) deve avere coppia nulla rispetto all'asse della cerniera.

La paratoia cilindrica è una superficie curva con linea di contorno contenuta in un piano. Applicando l'equazione globale dell'equilibrio statico al volume fluido racchiuso fra la superficie curva e il piano verticale di traccia AC (Figura 2.2), si calcola una spinta orizzontale pari alla somma della spinta orizzontale dell'olio, diretta verso destra e di modulo:

$$F_{xolio} = \gamma_{olio} \frac{D^2}{8} L$$

e della spinta orizzontale dell'acqua, diretta verso destra e di modulo:

$$F_{xacqua} = (2\gamma_{olio} + \gamma_{acqua}) \frac{D^2}{8} L.$$

In totale, risulta:

$$F_x = \gamma_{olio} \frac{D^2}{8} L + (2\gamma_{olio} + \gamma_{acqua}) \frac{D^2}{8} L.$$

Le spinte verticali si riconducono al peso, cambiato di segno, dei volumi di fluido isolati dalla superficie curva e dalla superficie verticale di traccia AC:

$$F_y = \gamma_{olio} \frac{\pi D^2}{16} L + \gamma_{acqua} \frac{\pi D^2}{16} L.$$

La spinta totale ha modulo pari a:

$$F_{tot} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

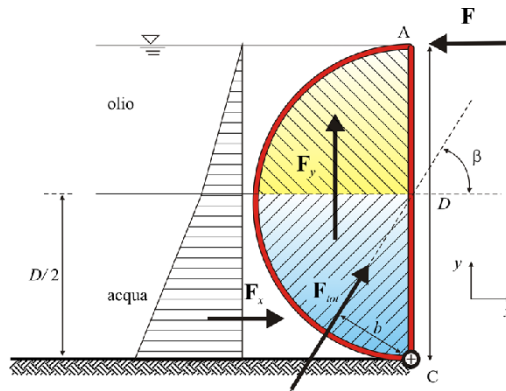


Figura 2.2. Diagramma della pressione e volumi virtuali per l'applicazione del metodo globale

passa per l'asse della paratoia, di traccia O, e forma un angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Il braccio è pari a:

$$b = \frac{D}{2} \cos \beta.$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse di traccia C, si calcola F :

$$F = \frac{F_{tot}b}{D}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$D = 3 \text{ m}, L = 4 \text{ m}, \gamma_{acqua} = 9806 \text{ N/m}^3, \gamma_{olio} = 7840 \text{ N/m}^3$$

$$F_{xolio} = \gamma_{olio} \frac{D^2}{8} L = 7840 \times \frac{3^2}{8} \times 4 = 35\,280 \text{ N}$$

$$F_{xacqua} = (2\gamma_{olio} + \gamma_{acqua}) \frac{D^2}{8} L = (2 \times 7840 + 9806) \times \frac{3^2}{8} \times 4 = 114\,690 \text{ N}$$

$$F_x = F_{xolio} + F_{xacqua} = 35\,280 + 114\,690 = 149\,970 \text{ N}$$

$$F_y = \gamma_{olio} \frac{\pi D^2}{16} L + \gamma_{acqua} \frac{\pi D^2}{16} L = 7840 \times \frac{\pi \times 3^2}{16} \times 4 + 9806 \times \frac{\pi \times 3^2}{16} \times 4 = 124\,730 \text{ N}$$

$$F_{tot} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{149\,970^2 + 124\,730^2} = 195\,060 \text{ N}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{124\,730}{149\,970} \right) = 39^\circ 45'$$

$$b = \frac{D}{2} \cos \beta = \frac{3}{2} \times \cos 39^\circ 45' = 1.15 \text{ m}$$

$$F = \frac{F_{tot}b}{D} = \frac{195\,060 \times 1.15}{3} = 74\,800 \text{ N}.$$

Esercizio 2.2

Il bicchiere semisferico di Figura 2.3 è mantenuto nella posizione mostrata grazie ad una forza esterna \mathbf{F} agente su di esso. Note le dimensioni geometriche sotto elencate e le caratteristiche del liquido a contatto, determinare modulo, direzione, verso e retta d'applicazione della forza \mathbf{F} .

◇ Dati: $\gamma_{acqua} = 9806 \text{ N/m}^3$, $R = (0.10 + C_u/100) \text{ m}$, $H_1 = R/3$, $H_2 = R/4$.

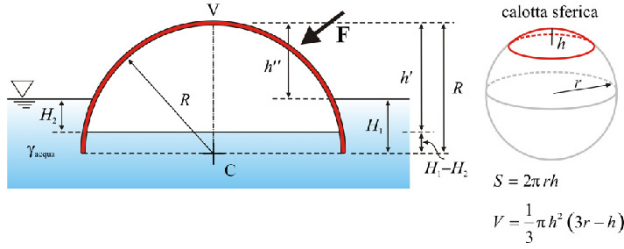


Figura 2.3. Bicchiere semisferico in acqua

Soluzione

La forza esterna \mathbf{F} deve equilibrare la spinta dovuta ai fluidi interni ed esterni al bicchiere. Per la simmetria della configurazione, la spinta non avrà componenti orizzontali ma solo componente verticale. Inoltre, sulla superficie curva di traccia AD-CB (Figura 2.4) la spinta è comunque nulla per la presenza di acqua internamente ed esternamente alla superficie (il bicchiere ha spessore nullo per ipotesi) dato che, punto per punto, le forze elementari sono uguali e opposte.

Resta, quindi, la spinta sul lato interno di traccia DEVFC dovuta all'aria intrappolata nel bicchiere e la spinta sulla superficie curva esterna di traccia DE-FC dovuta all'acqua che preme sul bicchiere.

La superficie esterna di traccia EVF è a contatto con l'aria a pressione atmosferica (nulla secondo il consueto riferimento alla pressione relativa) e, quindi, non riceve spinta.

Applicando l'equazione globale al volume DEVFC riempito d'aria si osserva che la spinta di interesse (\mathbf{S}_{aria}) (trascurando il peso \mathbf{G} dell'aria contenuta) è uguale alla spinta sulla superficie piana di traccia DC dovuta all'aria con pressione p_{aria} :

$$p_{aria} = \gamma_{acqua} H_2.$$

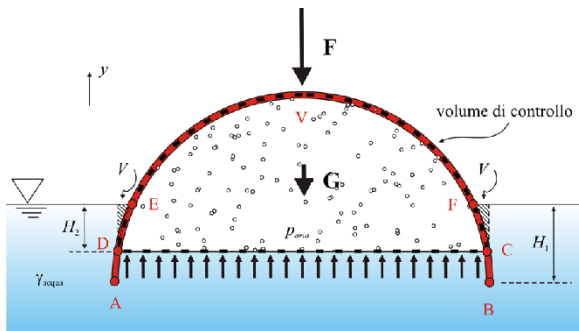


Figura 2.4. Volume di controllo e schema delle forze agenti

Si ha, quindi:

$$S_{aria} = p_{aria} \pi \frac{\overline{DC}^2}{4} = \gamma_{acqua} H_2 \pi \frac{\overline{DC}^2}{4} \quad (2.1)$$

diretta verso l'alto (positiva nel sistema di coordinate fissato in Figura 2.4).

La spinta dell'acqua esterna al bicchiere può essere valutata molto semplicemente con il metodo delle componenti; essa è uguale al peso del volume V trattenuto in Figura 2.4 ed è diretta verso il basso:

$$S_{acqua} = -\gamma_{acqua} V. \quad (2.2)$$

La spinta complessiva è, dunque:

$$S_{totale} = S_{aria} + S_{acqua} = \gamma_{acqua} H_2 \pi \frac{\overline{DC}^2}{4} - \gamma_{acqua} V. \quad (2.3)$$

La (2.3) ha una efficace interpretazione geometrica in quanto il primo termine (coincidente con (2.1)) corrisponde al peso di liquido contenuto entro un volume cilindrico di base circolare (diametro \overline{DC}) e altezza pari ad H_2 .

Quindi, la (2.3) è equivalente al calcolo del peso del volume di liquido di traccia DE-FC ottenuto dalla sottrazione del volume V dal volume cilindrico prima descritto.

Il volume del solido di rotazione di traccia DE-FC, denominato segmento sferico a due basi, è calcolabile sottraendo al volume della calotta sferica di altezza $R - (H_1 - H_2)$ la calotta più piccola di altezza $(R - H_1)$.

Si ha, quindi:

$$\begin{aligned} V_{DEVFC} &= \frac{1}{3} \pi \left\{ [R - (H_1 - H_2)]^2 [3R - (R - (H_1 - H_2))] \right\} \\ &= \frac{1}{3} \pi \left[(R - H_1 + H_2)^2 (2R + H_1 - H_2) \right] \\ V_{EVF} &= \frac{1}{3} \pi \left\{ (R - H_1)^2 [3R - (R - H_1)] \right\} = \frac{1}{3} \pi \left[(R - H_1)^2 (2R + H_1) \right] \\ S_{totale} &= \gamma_{acqua} V' = \gamma_{acqua} (V_{DEVFC} - V_{EVF}). \end{aligned}$$

La forza \mathbf{F} che equilibra la spinta totale è uguale in modulo, è verticale e diretta verso il basso.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$R = 0.10$ m, $H_1 = 0.033$ m, $H_2 = 0.025$ m

$$\begin{aligned} V' &= \left[\frac{1}{3} \pi (R - H_1 + H_2)^2 (2R + H_1 - H_2) - \frac{1}{3} \pi (R - H_1)^2 (2R + H_1) \right] \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left[(0.10 - 0.033 + 0.025)^2 \times (2 \times 0.10 + 0.033 - 0.025) - \right. \\ &\quad \left. (0.10 - 0.033)^2 \times (2 \times 0.10 + 0.033) \right] \\ &= 7.483 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \\ F &= -S_{totale} = -\gamma_{acqua} V' = -9806 \times 7.483 \times 10^{-4} = -7.34 \text{ N}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.3

Una paratoia cilindrica (Figura 2.5) di profondità unitaria e di raggio $R = (0.50 + C_{pu}/20)$ m, incernierata in A, si apre ruotando intorno ad A quando il livello nel serbatoio è pari a $h_{acqua} = (3.50 + C_u/10)$ m. Determinare:

- il modulo, il verso e la retta di applicazione della spinta esercitata dall'acqua, in condizioni limite di apertura;
- il peso della paratoia.

◇ Si assuma $\gamma = 9.8 \text{ kN/m}^3$.

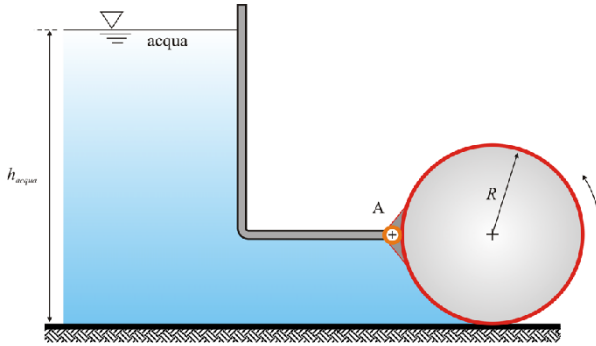


Figura 2.5. Paratoia cilindrica incernierata in A

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.6, l'acqua esercita una spinta orizzontale verso destra pari a:

$$F_x = \gamma \left(h_{acqua} - \frac{R}{2} \right) R$$

e una spinta verticale verso l'alto di modulo pari al peso del volume tratteggiato in Figura 2.6:

$$F_y = \gamma \left[(h_{acqua} - R) R + \frac{\pi R^2}{4} \right].$$

La spinta risultante ha modulo:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

passa per l'asse della paratoia circolare cilindrica e forma un angolo sull'orizzontale pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

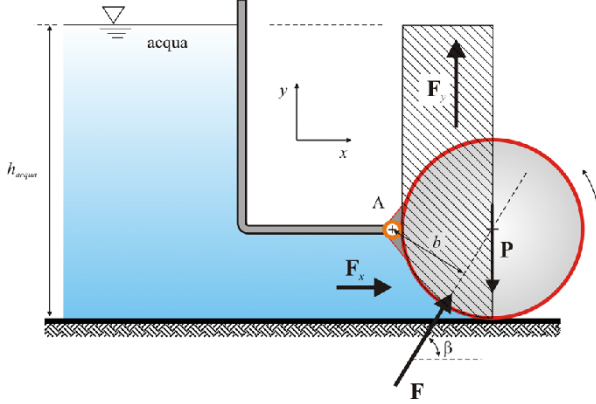


Figura 2.6. Sistema di coordinate e schema delle forze agenti

Il braccio rispetto all'asse di rotazione di traccia A è pari a:

$$b = R \sin \beta.$$

La coppia della spinta dell'acqua è antioraria ed è pari a:

$$M = |\mathbf{F}| b.$$

La coppia stabilizzante dovuta al peso della paratoia, è oraria ed è pari a PR . In condizioni limite di incipiente rotazione, risulta:

$$PR = |\mathbf{F}| b \rightarrow P = \frac{|\mathbf{F}| b}{R} \equiv |\mathbf{F}| \sin \beta.$$

$|\mathbf{F}| \sin \beta$ è pari ad F_y . Dunque, il peso della paratoia deve essere pari alla componente verticale della spinta dell'acqua. A questa soluzione si poteva pervenire direttamente in altro modo. Difatti, il momento rispetto all'asse di traccia A della forza \mathbf{F} non varia se si sposta il punto di applicazione di \mathbf{F} lungo la sua retta d'azione. Se si sceglie quale punto di applicazione la traccia dell'asse della paratoia cilindrica e si scompone \mathbf{F} nelle due componenti lungo x e lungo y , risulta immediato verificare che F_x non genera coppia rispetto ad A, mentre F_y genera la coppia destabilizzante con un braccio pari a R . Tale coppia, in condizioni limite, è bilanciata dalla coppia dovuta al peso della paratoia, che agisce con un braccio ancora pari a R . Pertanto, risulta:

$$F_y R = PR \rightarrow P = F_y.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$R = 0.50 \text{ m}, h_{acqua} = 3.50 \text{ m}$$

$$F_x = \gamma \left(h_{acqua} - \frac{R}{2} \right) R = 9800 \times \left(3.50 - \frac{0.50}{2} \right) \times 0.50 = 15\,925 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
F_y &= \gamma \left[(h_{acqua} - R) R + \frac{\pi R^2}{4} \right] = \\
9800 \times \left[(3.50 - 0.50) \times 0.50 + \frac{\pi \times 0.50^2}{4} \right] &= 16\,625 \text{ N} \\
|\mathbf{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{15\,925^2 + 16\,625^2} = 23\,020 \text{ N} \\
\beta &= \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{16\,625}{15\,925} \right) = 46^\circ 14' \\
b &= R \sin \beta = 0.5 \times \sin 46^\circ 14' = 0.36 \text{ m} \\
P &= |\mathbf{F}| \sin \beta \equiv F_y = 23\,020 \times \sin 46^\circ 14' = 16\,625 \text{ N}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.4

Il bicchiere semisferico di Figura 2.7 contiene in parte aria, in parte olio e in parte acqua, ed è mantenuto nella posizione mostrata grazie ad una forza esterna \mathbf{F} agente su di esso. Note le dimensioni geometriche sotto elencate e le caratteristiche dei fluidi, determinare:

- il modulo, il verso e la retta d'applicazione della forza \mathbf{F} ;
 - la pressione dell'aria.
- ◇ Dati: $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{olio} = 0.8 \times \gamma_{acqua}$, $R = (0.10 + C_u/100) \text{ m}$, $h_1 = R/3$, $h_2 = R/4$, $h_3 = R/2$.

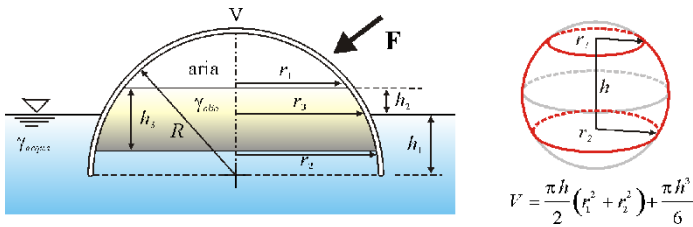


Figura 2.7. Bicchiere semisferico soggetto alla spinta di acqua, olio e aria

Soluzione

La forza esterna \mathbf{F} deve equilibrare la spinta idrostatica dovuta ai fluidi interni ed esterni al bicchiere. Per simmetria, la spinta idrostatica non avrà componenti orizzontali ma solo una componente verticale.

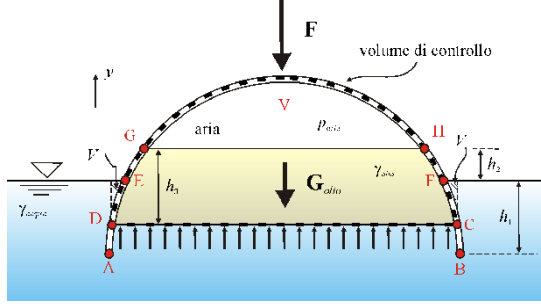


Figura 2.8. Volume di controllo e schema delle forze agenti

Sulla superficie curva di traccia DA-CB (Figura 2.8) la spinta è nulla in quanto, essendo il bicchiere privo di spessore, le spinte interne ed esterne esercitate dall'acqua sono equilibrate.

Restano da calcolare, quindi, la spinta dovuta all'acqua che preme sulla superficie esterna di traccia DE-FC e la spinta sul lato interno di traccia DEGVHFC, dovuta all'aria e all'olio.

Per quanto riguarda la superficie esterna di traccia DE-FC, applicando il metodo delle componenti si deduce che essa riceve una spinta che è verticale, verso il basso (come è evidente dato il verso della spinta elementare) ed uguale al peso del volume tratteggiato in Figura 2.8 riempito di acqua.

Tale volume può essere calcolato come la differenza tra il volume cilindrico che ha base circolare con raggio r_2 (Figura 2.7) e il segmento sferico con basi di raggio r_2 ed r_3 :

$$S_{esterna} = -\gamma_{acqua} V$$

$$= -\gamma_{acqua} \left[\pi r_2^2 (h_3 - h_2) - \frac{\pi (h_3 - h_2)}{2} (r_2^2 + r_3^2) - \frac{\pi (h_3 - h_2)^3}{6} \right].$$

La spinta sul lato interno di traccia DEGVHFC, dovuta all'aria e all'olio, può essere calcolata con diverse metodologie, ma la più conveniente è quella che prevede l'applicazione del metodo dell'equazione globale dell'equilibrio statico.

Isolando il volume interessato (Figura 2.9), che è riempito parzialmente di olio e di aria, e mettendo in evidenza tutte le forze di superficie e di massa agenti sul volume di controllo, risulta:

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \mathbf{G}_{olio} = 0$$

in cui Π_0 è la spinta sulla superficie curva e dovuta ai fluidi circostanti, Π_1 è la spinta sulla superficie piana circolare di raggio r_2 , \mathbf{G}_{olio} è il peso dell'olio che riempie il segmento sferico di raggi r_2 ed r_1 .

La spinta dei fluidi interni $\mathbf{S}_{interna}$ sulla superficie curva è uguale e opposta a Π_0 ; si ha, quindi:

$$\mathbf{S}_{interna} = -\Pi_0 = \Pi_1 + \mathbf{G}_{olio}.$$

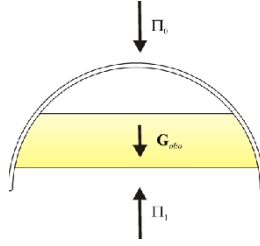


Figura 2.9. Schema per il calcolo delle spinte agenti sulla superficie interna del bicchiere

Poiché Π_1 e G_{olio} sono verticali, è confermato che anche $S_{interna}$ è verticale. Passando al calcolo, risulta:

$$\Pi_1 = pA = \gamma_{acqua} (h_3 - h_2) \pi r_2^2$$

$$G_{olio} = -\gamma_{olio} V_{olio} = -\gamma_{olio} \left[\frac{\pi h_3}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\pi h_3^3}{6} \right]$$

e, quindi:

$$S_{interna} = \Pi_1 + G_{olio} = \gamma_{acqua} (h_3 - h_2) \pi r_2^2 - \gamma_{olio} \left[\frac{\pi h_3}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\pi h_3^3}{6} \right].$$

Infine, la spinta complessiva risulta pari alla somma algebrica delle spinte interna ed esterna:

$$\begin{aligned} S_{totale} &= S_{interna} + S_{esterna} \\ F &= -S_{totale}. \end{aligned}$$

La pressione dell'aria si calcola applicando l'equazione dell'idrostatica:

$$p_{aria} = \gamma_{acqua} (h_3 - h_2) - \gamma_{olio} h_3.$$

In alternativa, è possibile eseguire il calcolo integrando le forze elementari dovute alla pressione che agisce all'interno e all'esterno del bicchiere.

In Figura 2.10 è riportato il diagramma della pressione e il sistema di coordinate radiali $R - \alpha$ scelto per semplicità di calcolo.

La pressione relativa dell'aria nella calotta è uniforme e agisce sulla calotta sferica di traccia GVH.

Agendo sulla superficie elementare di area:

$$dA = 2\pi R^2 \cos \alpha d\alpha$$

genera una spinta elementare solo verticale pari a:

$$dF_{yaria} = p_{aria} 2\pi R^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

La componente orizzontale è autoequilibrata e ha l'unico effetto di modificare lo stato tensionale del materiale del bicchiere.

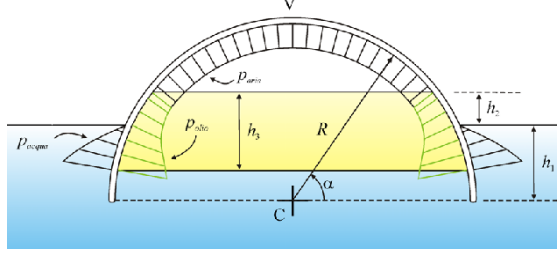


Figura 2.10. Distribuzione radiale della pressione interna ed esterna

La spinta verticale dell'aria nella calotta si ottiene per integrazione:

$$F_{yaria} = \int_{\alpha_0}^{\pi/2} p_{aria} 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = p_{aria} \pi R^2 \cos^2 \alpha \Big|_{\pi/2}^{\alpha_0} = p_{aria} \pi R^2 \cos^2 \alpha_0.$$

L'angolo iniziale di integrazione è pari a:

$$\alpha_0 = \sin^{-1} \left(\frac{h_1 + h_2}{R} \right).$$

Si noti che la grandezza $R \cos \alpha_0$ coincide con il raggio r_1 . Pertanto, trascurando il peso dell'aria, la spinta verticale dell'aria sulla calotta è pari alla spinta dell'aria sulla superficie circolare di base della calotta.

La pressione dell'olio è crescente verso il basso, secondo la seguente relazione:

$$p_{olio} = p_{aria} + \gamma_{olio} (h_1 + h_2 - R \sin \alpha)$$

e genera una spinta elementare solo verticale pari a:

$$dF_{yolio} = p_{olio} 2\pi R^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha.$$

In modo analogo a quanto calcolato per l'aria, la spinta verticale dell'olio si ottiene per integrazione:

$$\begin{aligned} F_{yolio} &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} [p_{aria} + \gamma_{olio} (h_1 + h_2 - R \sin \alpha)] 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= \left[-p_{aria} \pi R^2 \cos^2 \alpha - \gamma_{olio} (h_1 + h_2) \pi R^2 \cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma_{olio} \sin^3 \alpha \right] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0} \\ &= -\pi p_{aria} h_3 (h_3 - 2h_1 - 2h_2) - \pi \gamma_{olio} \frac{h_3^2}{3} (2h_3 - 3h_1 - 3h_2). \end{aligned}$$

Gli estremi di integrazione sono pari a:

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \left(\frac{h_1 + h_2 - h_3}{R} \right), \alpha_0.$$

Si noti che, con i valori fissati per h_1 , h_2 e h_3 e per il prefissato rapporto tra peso specifico dell'olio e dell'acqua, per pura coincidenza la spinta verticale dell'olio è nulla.

La pressione dell'acqua all'esterno, agendo sulla superficie di traccia ED e FC, genera una spinta orizzontale autoequilibrata e una spinta verticale diretta verso il basso.

La pressione dell'acqua è crescente verso il basso secondo la seguente relazione:

$$p_{acqua} = \gamma_{acqua} (h_1 - R \sin \alpha)$$

e genera una spinta solo verticale pari a:

$$\begin{aligned} F_{y_{acqua}} &= \int_0^{\alpha_1} p_{acqua} 2\pi R^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= \left[-\gamma_{acqua} h_1 \pi R^2 \cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma \sin^3 \alpha \right] \Big|_0^{\alpha_1} \\ &= -\gamma_{acqua} \pi \frac{(h_2 - h_3)^2}{3} (3h_1 - 2h_3 + 2h_2). \end{aligned}$$

Si osservi che i calcoli eseguiti integrando le forze elementari sono molto più complessi di quelli che è necessario svolgere facendo uso dell'equazione globale della statica.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$R = 0.10$ m, $h_1 = 0.033$ m, $h_2 = 0.025$ m, $h_3 = 0.05$ m, $\gamma_{acqua} = 9800$ N/m³, $\gamma_{olio} = 7840$ N/m³

$$r_1 = \sqrt{R^2 - (h_1 + h_2)^2} = \sqrt{0.10^2 - (0.033 + 0.025)^2} = 0.0815 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 - (h_1 + h_2 - h_3)^2} = \sqrt{0.10^2 - (0.033 + 0.025 - 0.05)^2} = 0.0997 \text{ m}$$

$$r_3 = \sqrt{R^2 - h_1^2} = \sqrt{0.10^2 - 0.033^2} = 0.0944 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi r_2^2 (h_3 - h_2) - \frac{\pi (h_3 - h_2)}{2} (r_2^2 + r_3^2) - \frac{\pi (h_3 - h_2)^3}{6} \\ &= \pi \times 0.0997^2 \times (0.05 - 0.025) - \frac{\pi \times (0.05 - 0.025)}{2} \times (0.0997^2 + 0.0944^2) \\ &\quad - \frac{\pi \times (0.05 - 0.025)^3}{6} \\ &= 3.2217 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{olio} &= \frac{\pi h_3}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\pi h_3^3}{6} \\ &= \frac{\pi \times 0.05}{2} \times (0.0815^2 + 0.0997^2) + \frac{\pi \times 0.05^3}{6} = 1.3678 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= - [\gamma_{acqua} (h_3 - h_2) \pi r_2^2 - \gamma_{olio} V_{olio} - \gamma_{acqua} V] \\
 &= - \left[9800 \times (0.05 - 0.025) \times \pi \times 0.0997^2 - \right. \\
 &\quad \left. 7840 \times 1.3678 \times 10^{-3} - 9800 \times 4.0393 \times 10^{-5} \right] = 3.47 \text{ N}.
 \end{aligned}$$

Tale forza è diretta verso l'alto. Inoltre:

$$\begin{aligned}
 p_{aria} &= \gamma_{acqua} (h_3 - h_2) - \gamma_{olio} h_3 \\
 &= 9800 \times (0.05 - 0.025) - 7840 \times 0.05 = -147 \text{ Pa} \equiv -1.47 \text{ mbar}.
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.5

La costruzione in Figura 2.11 è mantenuta con pressione interna pari al valore atmosferico. Essa presenta una cupola *semisferica* di traccia ABD il cui piano diametrale è inclinato dell'angolo α sull'orizzontale.

- Determinare il modulo e l'inclinazione sull'orizzontale della spinta idrostatica complessiva (dovuta all'aria interna e ai liquidi esterni) sulla parete semisferica.
- ◇ I dati geometrici e gli altri valori utili sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= (10 + C_{pu}) \text{ m}, \quad H_2 = (5 + C_{pu}) \text{ m}, \quad h = (3 + C_u/20) \text{ m}, \quad \alpha = (60 + C_u)^\circ, \\
 \gamma_1 &= 10100 \text{ N/m}^3, \quad \gamma_2 = 6500 \text{ N/m}^3.
 \end{aligned}$$

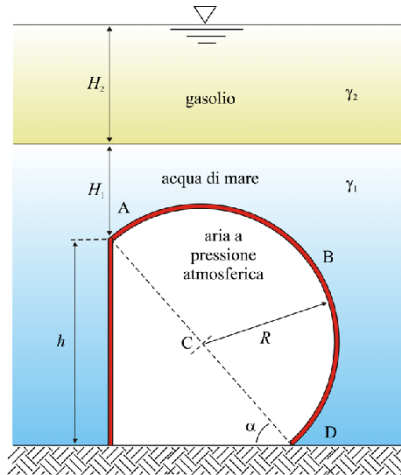


Figura 2.11. Schema della superficie gobba soggetta alla spinta di fluidi stratificati

Soluzione

La spinta dovuta all'aria a pressione atmosferica all'interno della cupola è nulla in quanto la pressione atmosferica agisce anche sulla superficie del gasolio e quindi, complessivamente, l'effetto sulla superficie di interesse è uguale a zero.

Applicando l'equazione globale di equilibrio statico al volume semisferico idealmente riempito di liquido (metodo dell'equazione globale, Figura 2.12), risulta:

$$\mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{G}_s = \mathbf{0}$$

in cui $\mathbf{\Pi}_1$ è la spinta sulla superficie piana di forma circolare e centro C, \mathbf{G}_s è il peso dell'acqua di mare che riempie idealmente il volume della semisfera, $\mathbf{\Pi}_0$ è la spinta sulla superficie laterale della semisfera.

La semisfera ha raggio R deducibile dalla relazione trigonometrica:

$$R = \frac{h}{2 \sin \alpha}.$$

Poiché la spinta idrostatica richiesta \mathbf{F} coincide con $\mathbf{\Pi}_0$, si ha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Pi}_0 = -\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{G}_s.$$

La spinta $\mathbf{\Pi}_1$ si calcola come prodotto della pressione in C e dell'area del cerchio massimo della semisfera:

$$|\mathbf{\Pi}_1| = \left[\gamma_2 H_2 + \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \right] \pi R^2$$

mentre il peso del liquido nella semisfera è pari a:

$$|\mathbf{G}_s| = \gamma_1 \frac{2}{3} \pi R^3.$$

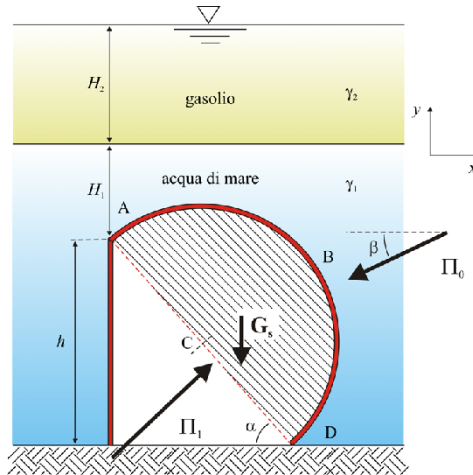


Figura 2.12. Schema per l'applicazione del metodo dell'equazione globale di equilibrio

Dato che i vettori \mathbf{G}_s e $\mathbf{\Pi}_1$ sono, rispettivamente, verticale e inclinato di un angolo α , è facile dedurre che la spinta idrostatica sulla semisfera ha componente F_x pari alla componente lungo x del vettore $-\mathbf{\Pi}_1$ e cioè:

$$F_x = -\pi R^2 \sin \alpha \left[\gamma_2 H_2 + \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \right].$$

Il verso della spinta orizzontale è, quindi, da destra verso sinistra, opposto al verso positivo dell'asse x assunto.

La componente verticale F_y è pari a:

$$F_y = \Pi_{0y} = -\Pi_{1y} - G_{sy}$$

cioè:

$$F_y = -\pi R^2 \cos \alpha \left[\gamma_2 H_2 + \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \right] + \gamma_1 \frac{2}{3} \pi R^3.$$

La spinta verticale è diretta verso l'alto se:

$$F_y > 0 \rightarrow \alpha > \cos^{-1} \left[\frac{2R}{3 \left(\frac{\gamma_2 H_2}{\gamma_1} + H_1 + \frac{h}{2} \right)} \right].$$

La spinta risultante ha modulo pari a:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

passa per il centro della sfera (poiché è la composizione di spinte elementari associate alle forze di pressione, tutte ortogonali alla superficie e, quindi, concorrenti nel centro della sfera), è contenuta nel piano verticale x - y per simmetria, e ha inclinazione sull'orizzontale pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Per meglio comprendere i risultati ottenuti, si osservi la Figura 2.13. In questa figura a sinistra è riportata la sezione dei volumi ottenuta con un piano verticale passante per il centro della semisfera, a destra è riportata un'assonometria.

La componente verticale di spinta che agisce sulla superficie è pari al peso del volume di fluido (stratificato) $V_1 + V_2$ sovrastante la calotta, diretto verso il basso, e alla spinta di Archimede relativa al volume V_3 , diretta verso l'alto.

Nell'esplosione in Figura 2.14 sono riportati i volumi necessari per il calcolo delle due forze. Le due forze sono applicate, rispettivamente, nel baricentro delle masse di fluido contenute in V_1 e in V_2 , e nel centro di carena del volume V_3 .

Tuttavia, eseguire il calcolo con riferimento a questo schema introduce alcune complessità analitiche, per la presenza di un volume di intersezione tra un cilindro a base ellittica ed asse verticale e una superficie sferica (volume V_2). È conveniente,

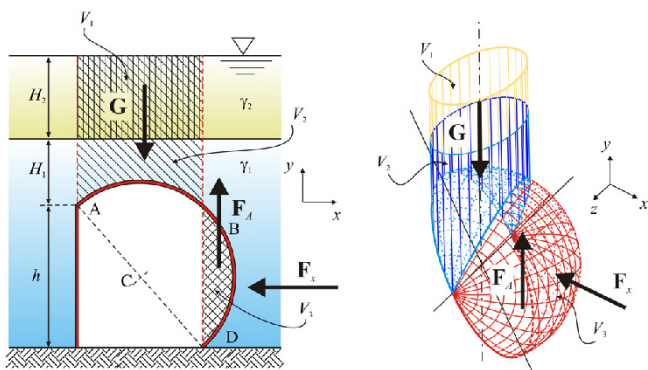


Figura 2.13. Sezione e vista assonometrica dei volumi definiti per il calcolo delle spinte

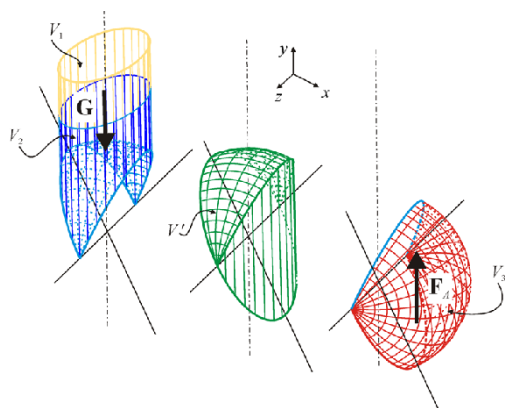


Figura 2.14. Esploso in assonometria dei volumi definiti per il calcolo delle spinte verticali

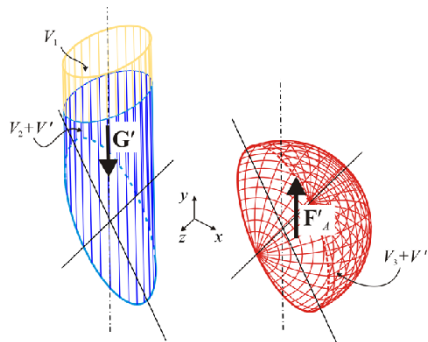


Figura 2.15. Esploso in assonometria dei volumi combinati per semplificare il calcolo delle spinte verticali

invece, sommare e sottrarre il contributo del volume V' che permette di ricondurci al calcolo del volume di un'unghia cilindrica e di una semisfera, secondo lo schema riportato in Figura 2.15.

L'area della superficie ellittica di base del cilindro è pari all'area della proiezione lungo l'asse y del cerchio massimo della semisfera:

$$A_{by} = \pi R^2 \cos \alpha$$

con $R = h/(2 \sin \alpha)$.

Quindi:

$$G' = -\gamma_2 H_2 \pi R^2 \cos \alpha - \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \pi R^2 \cos \alpha.$$

La spinta di Archimede sulla semisfera è pari a:

$$F'_A = \gamma_1 \frac{2}{3} \pi R^2.$$

La spinta verticale è pari a:

$$F_y = -\gamma_2 H_2 \pi R^2 \cos \alpha - \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \pi R^2 \cos \alpha + \gamma_1 \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Con riferimento alla Figura 2.16, la spinta orizzontale è pari alla spinta idrostatica sulla proiezione lungo x del cerchio massimo della semisfera.

Tale proiezione ha area della superficie pari a:

$$A_{bx} = \pi R^2 \sin \alpha$$

e, quindi:

$$F_x = -\pi R^2 \sin \alpha \left[\gamma_2 H_2 + \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \right]$$

diretta verso sinistra.

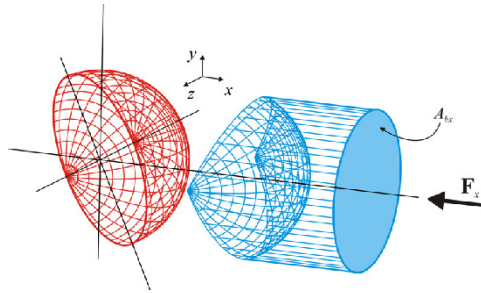


Figura 2.16. Esploso in assonometria dei volumi definiti per il calcolo della spinta orizzontale

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$H_1 = 10 \text{ m}, H_2 = 5 \text{ m}, h = 3 \text{ m}, \alpha = 60^\circ, \gamma_1 = 10\,100 \text{ N/m}^3, \gamma_2 = 6500 \text{ N/m}^3$$

$$R = \frac{h}{2 \sin \alpha} = \frac{3}{2 \times \sin 60^\circ} = 1.73 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} F_y &= -\gamma_2 H_2 \pi R^2 \cos \alpha - \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \pi R^2 \cos \alpha + \gamma_1 \frac{2}{3} \pi R^3 = \\ &= -6500 \times 5 \times \pi \times 1.73^2 \times \cos 60^\circ - 10\,100 \times \left(10 + \frac{3}{2} \right) \times \pi \times 1.73^2 \times \\ &\quad \cos 60^\circ + 10\,100 \times \frac{2}{3} \times \pi \times 1.73^3 = -589.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

diretta verso il basso.

$$\begin{aligned} F_x &= \left[-\gamma_2 H_2 - \gamma_1 \left(H_1 + \frac{h}{2} \right) \right] \pi R^2 \sin \alpha = \\ &= \left[-6500 \times 5 - 10\,100 \times \left(10 + \frac{3}{2} \right) \right] \times \pi \times 1.73^2 \times \sin 60^\circ = -1210.4 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1210.4^2 + 589.3^2} = 1346.2 \text{ kN}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-589.3}{-1210.4} \right) = 26^\circ.$$

Esercizio 2.6

Il serbatoio di Figura 2.17 presenta una semisfera inserita nella parete ed è riempito solo parzialmente con acqua. La pressione relativa dell'aria è indicata dal manometro ed è negativa.

Determinare il modulo e l'inclinazione sull'orizzontale della spinta idrostatica sulla semisfera nelle due ipotesi:

- livello idrico posizionato alla distanza h sopra il punto C (situazione illustrata in Figura 2.17);
- livello idrico passante per il punto C.

◇ I valori numerici sono i seguenti:

$$n = -(0.5 + C_u/20) \text{ Kg}_p/\text{cm}^2, R = (0.25 + C_u/100) \text{ m}, h = (1 + C_{pu}/10) \text{ m}, \gamma = 9806 \text{ N/m}^3.$$

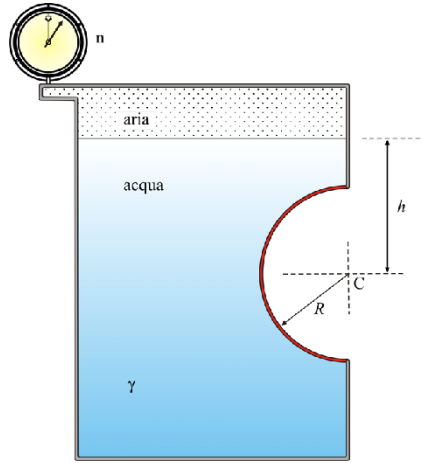


Figura 2.17. Schema del serbatoio con superficie gobba semisferica

Soluzione

Caso a): livello idrico a distanza h da C .

Applicando l'equazione globale di equilibrio statico al volume semisferico idealmente riempito di liquido (metodo dell'equazione globale, Figura 2.18), risulta:

$$\Pi_0 + \Pi_1 + \mathbf{G}_w = \mathbf{0}$$

in cui Π_1 è la spinta sulla superficie piana di forma circolare, \mathbf{G}_w è il peso dell'acqua che riempie idealmente il volume della semisfera, Π_0 è la spinta sulla superficie laterale della semisfera. Poiché la spinta idrostatica richiesta \mathbf{F} coincide con Π_0 , si ha:

$$\mathbf{F} \equiv \Pi_0 = -\Pi_1 - \mathbf{G}_w.$$

Dato che i vettori \mathbf{G}_w e Π_1 sono, rispettivamente, verticale e orizzontale, è facile dedurre che la spinta idrostatica sulla semisfera ha componente F_x pari al modulo

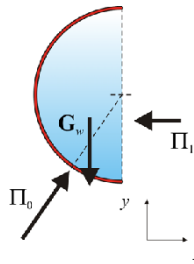


Figura 2.18. Volume di controllo e schema delle forze per l'applicazione del metodo dell'equazione globale nel caso di superficie gobba completamente immersa in acqua

di Π_1 e cioè:

$$F_x = (\gamma_{acqua} h + p_{aria}) \frac{\pi D^2}{4}.$$

p_{aria} è la pressione relativa dell'aria indicata dal manometro. Il verso della spinta orizzontale dipende dal segno della pressione relativa nel baricentro della superficie piana. Se, in particolare, la pressione è negativa, la forza è diretta verso sinistra (verso negativo dell'ascissa x).

La componente verticale F_y è diretta verso l'alto e ha modulo pari al modulo di \mathbf{G}_w :

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{6} \frac{1}{2}.$$

Il modulo della spinta è pari a:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

e l'inclinazione sull'orizzontale si calcola come segue:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Caso b): livello idrico passante per C.

L'analisi è identica a quella svolta nel punto precedente, ma la spinta è dovuta sia all'acqua, che preme sul quarto inferiore, che all'aria, che preme sul quarto superiore. Non è richiesto di separare le due porzioni di spinta che si può quindi valutare complessivamente applicando l'equazione globale alla semisfera riempita di liquido solo nel quarto inferiore (Figura 2.19).

Trascurando il peso dell'aria, l'equazione globale si può scrivere come:

$$\Pi_0 + \mathbf{G}_w + \Pi_{1a} + \Pi_{1w} = \mathbf{0}$$

in cui \mathbf{G}_w è il peso del quarto di sfera riempito di liquido, Π_{1w} è la spinta dovuta al liquido che preme sulla superficie piana di forma semicircolare, Π_{1a} è la spinta dovuta all'aria sulla porzione piana superiore a forma di semicerchio e Π_0 è la

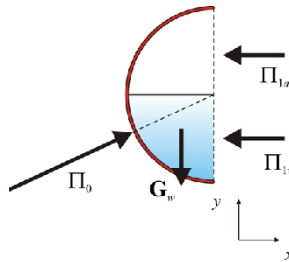


Figura 2.19. Volume di controllo e schema delle forze per l'applicazione del metodo dell'equazione globale nel caso di superficie gobba parzialmente immersa in acqua

spinta sulla superficie laterale della semisfera. La spinta ricercata \mathbf{F} coincide ancora con $\mathbf{\Pi}_0$ e quindi si ha:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{G}_w - \mathbf{\Pi}_{1a} - \mathbf{\Pi}_{1w}$$

con:

$$\begin{aligned} G_w &= \gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{6} \frac{1}{4} \\ \Pi_{1a} &= p_{aria} \frac{\pi D^2}{8} \\ \Pi_{1w} &= p_{Gacqua} \frac{\pi D^2}{8} = \left(\gamma_{acqua} \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2} + p_{aria} \right) \frac{\pi D^2}{8} \end{aligned}$$

dato che il baricentro del semicerchio è situato a distanza $\frac{4}{3\pi} \frac{D}{2}$ dal centro del cerchio (Appendice A).

La componente orizzontale è ancora data dalla forza sulla superficie piana. Risulta, quindi:

$$F_x = -\Pi_{1a} - \Pi_{1w}.$$

Il segno dipende ancora dal valore della somma algebrica sopra scritta.

La componente verticale F_y è diretta verso l'alto ed è pari al modulo di \mathbf{G}_w :

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{6} \frac{1}{4}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

Caso a): livello idrico a distanza h da C.

$n = -0.5 \text{ kg}_p/\text{cm}^2$, $R = 0.25 \text{ m}$, $h = 1.0 \text{ m}$

$$\begin{aligned} F_x &= (\gamma_{acqua} h + p_{aria}) \frac{\pi D^2}{4} = \\ &= (9806 \times 1.0 - 0.5 \times 9.806 \times 10^4) \times \frac{\pi \times 0.5^2}{4} = -7700 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{6} \frac{1}{2} = 9806 \times \frac{\pi \times 0.5^3}{6} \times \frac{1}{2} = 320 \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{7700^2 + 320^2} = 7706 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{320}{-7700} \right) = -2^\circ 24'.$$

Caso b): livello idrico passante per C.

$$\begin{aligned} F_x &= \left(\gamma_{acqua} \frac{4}{3\pi} \frac{D}{2} + 2p_{aria} \right) \frac{\pi D^2}{8} = \\ &= \left(9806 \times \frac{4}{3 \times \pi} \times \frac{0.5}{2} - 2 \times 0.5 \times 9.806 \times 10^4 \right) \times \frac{\pi \times 0.5^2}{8} = -9525 \text{ N} \end{aligned}$$

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{6} \frac{1}{4} = 9806 \times \frac{\pi \times 0.5^3}{6} \times \frac{1}{4} = 160 \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9525^2 + 160^2} = 9526 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{160}{-9525} \right) = -1^\circ.$$

N.B. In nessun caso la pressione relativa dell'aria può essere inferiore a $-p_{atm}$!

Esercizio 2.7

Nel sistema in Figura 2.20 la paratoia circolare cilindrica, di profondità $L = 2 \text{ m}$ e di raggio $R = (4 + C_{pu}/2) \text{ m}$, è incernierata in O. La paratoia è simmetrica rispetto all'orizzontale e l'angolo è pari a $\alpha = (120 + 5 \times C_u)^\circ$.

- Calcolare la spinta sulla paratoia e il suo punto di applicazione se il fluido è omogeneo di peso specifico $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$.
- Eseguire gli stessi calcoli se il fluido è stratificato con peso specifico variabile secondo la relazione seguente:

$$\gamma = (9800 + 1000 z/R) \text{ N/m}^3.$$

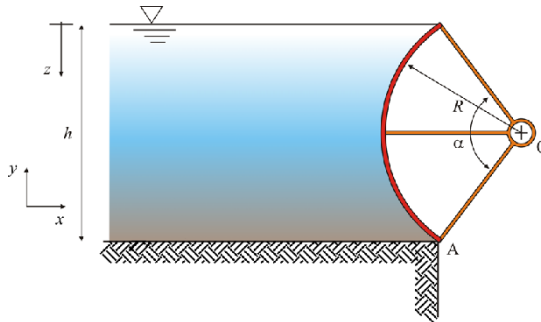


Figura 2.20. Paratoia circolare cilindrica incernierata in O

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate riportato in Figura 2.21, sulla base della geometria il tirante idrico è pari a:

$$h = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Se il fluido è omogeneo, la componente orizzontale di spinta è pari a:

$$F_x = \frac{1}{2} \gamma h^2 L$$

e la componente verticale è la spinta di Archimede che agisce sul volume V tratteggiato in Figura 2.21:

$$F_y = \gamma \left(\frac{\alpha}{2} R^2 - R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) L \equiv \frac{1}{2} \gamma R^2 L (\alpha - \sin \alpha)$$

diretta verso l'alto.

La spinta risultante passa per O e forma un angolo, rispetto all'orizzontale, pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Se il fluido è stratificato, la distribuzione di pressione cresce più che linearmente con l'affondamento (Figura 2.22). Ricorrendo all'equazione indefinita della statica e indicando più generalmente:

$$\gamma(z) = \gamma_0 + \gamma' \frac{z}{R}$$

risulta:

$$p(z) = \int_0^z \gamma(z) dz = \int_0^z \left(\gamma_0 + \gamma' \frac{z}{R} \right) dz = \gamma_0 z + \frac{\gamma'}{2} \frac{z^2}{R}$$

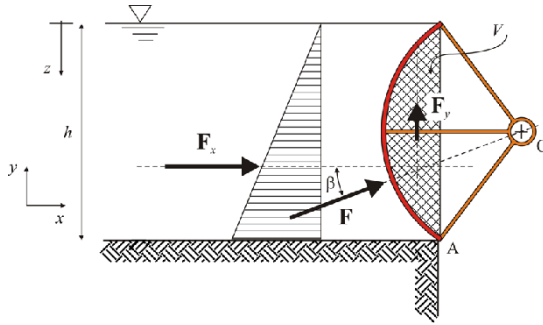


Figura 2.21. Diagramma della pressione e volume virtuale V (tratteggiato) per l'applicazione del metodo dell'equazione globale nel caso di fluido omogeneo

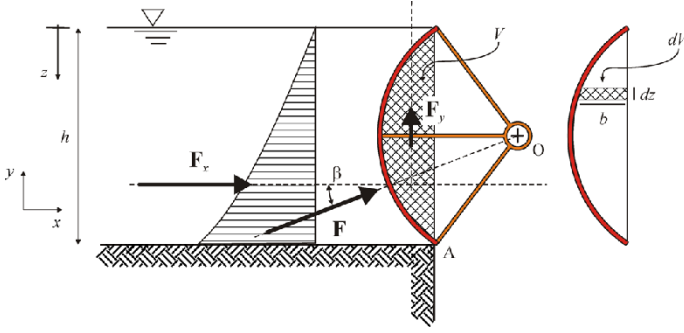


Figura 2.22. Diagramma della pressione e volume virtuale V (tratteggiato) per l'applicazione del metodo dell'equazione globale nel caso di fluido stratificato a densità variabile

e la spinta orizzontale è pari a:

$$F_x = \int_0^h p(z) L dz = \int_0^h \left(\gamma_0 z + \frac{\gamma'}{2} \frac{z^2}{R} \right) L dz = \frac{\gamma_0}{2} h^2 L + \frac{\gamma'}{6} \frac{h^3}{R} L. \quad (2.4)$$

La spinta verticale è diretta verso l'alto ed è pari, in modulo, al peso del fluido (stratificato) contenuto nel volume V in Figura 2.22. Tale peso si calcola per integrazione come segue.

Il volume elementare dV per unità di profondità è un parallelepipedo di base pari a:

$$b = \sqrt{R^2 - \left(R \sin \frac{\alpha}{2} - z \right)^2} - R \cos \frac{\alpha}{2}$$

e altezza dz . Quindi, la spinta verticale è pari a:

$$F_y = \int_0^h \left(\gamma_0 + \gamma' \frac{z}{R} \right) L \left[\sqrt{R^2 - \left(R \sin \frac{\alpha}{2} - z \right)^2} - R \cos \frac{\alpha}{2} \right] dz. \quad (2.5)$$

In alternativa è possibile calcolare la spinta, sia orizzontale che verticale, integrando la forza elementare che agisce sulla superficie infinitesima $R d\theta$ di profondità unitaria (Figura 2.23). A titolo di esempio, per la forza in direzione verticale si ha:

$$F_y = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left(\gamma_0 z + \frac{\gamma'}{2} \frac{z^2}{R} \right) L R \sin \theta d\theta. \quad (2.6)$$

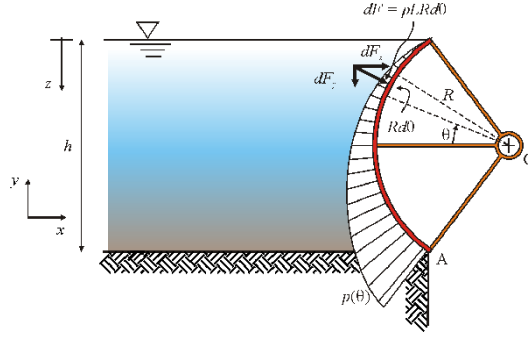


Figura 2.23. Diagramma della pressione e sistema di coordinate per l'integrazione delle forze elementari agenti sulla paratoia

L'integrale (2.6) può essere calcolato analiticamente esprimendo z in funzione di R e θ e l'integrale definito, calcolato tra $-\alpha/2$ e $+\alpha/2$, assume il seguente valore:

$$F_y \Big|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \underbrace{\frac{1}{2} \gamma_0 R^2 L (\alpha - \sin \alpha)}_{\text{contributo base}} + \underbrace{\frac{1}{2} \gamma' \sin \frac{\alpha}{2} R^2 L (\alpha - \sin \alpha)}_{\text{contributo della variazione di densità}} \equiv \frac{1}{2} R^2 L \left(\gamma_0 + \gamma' \sin \frac{\alpha}{2} \right) (\alpha - \sin \alpha).$$

La spinta è ancora diretta verso l'alto.

La spinta risultante passa per O e forma un angolo, rispetto all'orizzontale, pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$L = 2$ m, $R = 4$ m, $\alpha = 120^\circ$, $h = 6.93$ m.

Fluido omogeneo

$$F_x = \frac{1}{2} \gamma h^2 L = \frac{1}{2} \times 9800 \times 6.93^2 \times 2 = 470.40 \text{ kN}$$

$$F_y = \gamma \left(\frac{\alpha}{2} R^2 - R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) L = 9800 \times \left(\frac{120^\circ \times \pi}{2 \times 180^\circ} \times 4^2 - 4^2 \times \sin \frac{120^\circ}{2} \times \cos \frac{120^\circ}{2} \right) \times 2 = 192.61 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{470.40^2 + 192.61^2} = 508.31 \text{ kN}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{192.61}{470.40} \right) = 22.27^\circ.$$

Fluido stratificato

$$F_x = \frac{9800}{2} h^2 L + \frac{1000}{3} \frac{h^3}{R} L = \frac{9800}{2} \times 6.93^2 \times 2 + \frac{1000}{6} \times \frac{6.93^3}{2} \times 2 = 478.65 \text{ kN}$$

$$F_y \Big|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} R^2 L \left(\gamma_0 + \gamma' \sin \frac{\alpha}{2} \right) (\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \times 4^2 \times 2 \times \left(9800 + 1000 \times \sin \frac{120^\circ}{2} \right) \times \left(\frac{120^\circ}{180^\circ} \times \pi - \sin 120^\circ \right) = 209.62 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{478.65^2 + 209.62^2} = 522.54 \text{ kN}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{209.62}{478.65} \right) = 23^\circ 39'.$$

Esercizio 2.8

Il cilindro in Figura 2.24 è immerso in acqua e ha una lunghezza, ortogonalmente al disegno, pari a $L = 1.50$ m. Calcolare:

- la componente orizzontale e la componente verticale della spinta esercitata dall'acqua sul cilindro;
- la direzione e il verso della spinta.

◇ Si assuma: $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$, $R = (0.50 + C_u/10) \text{ m}$, $\alpha = (45 + C_{pu})^\circ$.

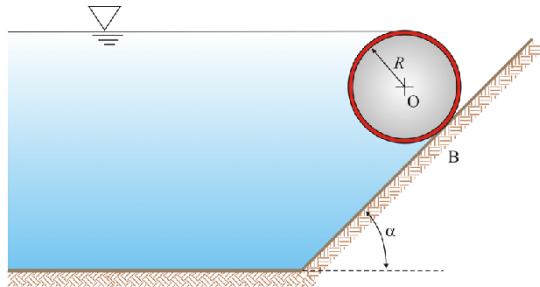


Figura 2.24. Cilindro soggetto alla spinta dell'acqua

Soluzione

La componente orizzontale della spinta è pari alla spinta sulla superficie curva \widehat{AC} , che delimita la porzione di cilindro tratteggiata in Figura 2.25:

$$F_x = \gamma \frac{R^2}{2} (1 + \cos \alpha)^2 L.$$

La componente verticale della spinta è diretta verso l'alto ed è pari al peso del volume tratteggiato in Figura 2.26. Tale volume può scomporsi nel volume del semicilindro CE e del solido sovrastante la superficie di traccia \widehat{EB} . Risulta, in definitiva:

$$F_y = \gamma \frac{\pi R^2}{2} L + \gamma \left[R^2 \left(\frac{2 + \cos \alpha}{2} \right) \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] L.$$

La risultante della spinta passa per l'asse del cilindro, di traccia O , ed è inclinata sull'orizzontale di un angolo pari a $\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$R = 0.50$ m, $\alpha = 45^\circ$, $L = 1.50$ m

$$F_x = \gamma \frac{R^2}{2} (1 + \cos \alpha)^2 L = 9800 \times \frac{0.5^2}{2} \times (1 + \cos 45^\circ)^2 \times 1.50 = 5.35 \text{ kN}$$

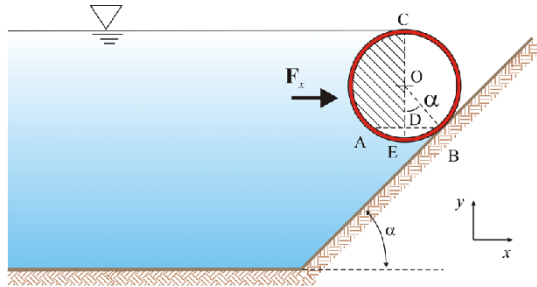


Figura 2.25. Sistema di coordinate e schema per il calcolo della spinta orizzontale

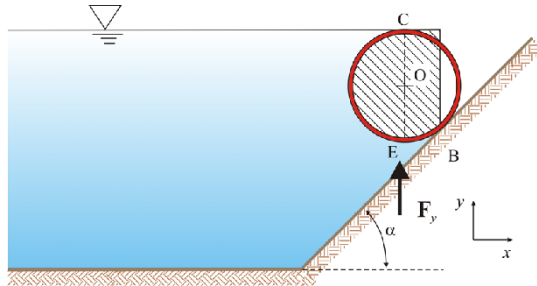


Figura 2.26. Sistema di coordinate e schema per il calcolo della spinta verticale

$$\begin{aligned}
 F_y &= \gamma \frac{\pi R^2}{2} L + \gamma \left[R^2 \left(\frac{2 + \cos \alpha}{2} \right) \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] L = \\
 &= 9800 \times \frac{\pi \times 0.5^2}{2} \times 1.50 + \\
 &= 9800 \times \left[0.5^2 \times \left(\frac{2 + \cos 45^\circ}{2} \right) \times \sin 45^\circ + \frac{\pi}{8} \times 0.5^2 \right] \times 1.50 = 10.73 \text{ kN} \\
 \beta &= \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{10.73}{5.35} \right) = 63^\circ 30'.
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.9

Nel sistema in Figura 2.27 il cassone a tenuta ha una profondità unitaria e contiene aria in pressione.

- Determinare il modulo, il verso e la retta di applicazione della spinta esercitata dall'aria, dall'olio e dall'acqua sulla superficie a quarto di cilindro AB.
- ◇ Si assuma: $\gamma_{olio} = 8000 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{aria} = 0$, $h_1 = (3.00 + C_u/10) \text{ m}$, $h_2 = (2.00 + C_u/10) \text{ m}$, $R = 1.50 \text{ m}$, $n = (0.20 + C_{pu}/20) \text{ bar}$.

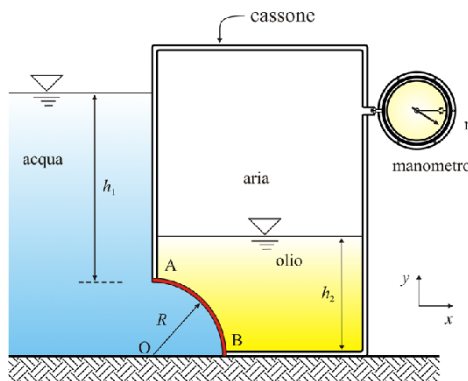


Figura 2.27. Cassone pressurizzato

Soluzione

La spinta dovuta all'olio contenuto nel cassone deve tenere conto della presenza dell'aria in pressione sovrastante; per effetto di quest'ultima, il piano dei carichi idrostatici dell'olio sovrasta la superficie libera dell'olio della quantità:

$$h_3 = \frac{p_{aria}}{\gamma_{olio}}$$

secondo lo schema riportato in Figura 2.28. La spinta dell'olio sulla superficie curva (di profondità unitaria) si può calcolare, ad esempio, ricorrendo al metodo delle componenti. La componente orizzontale è pari a:

$$F_{xolio} = -\gamma_{olio} \left[h_3 + \left(h_2 - \frac{R}{2} \right) \right] R$$

negativa nel sistema di coordinate adottato.

La componente verticale è pari al peso del volume (tratteggiato in Figura 2.28) compreso tra la superficie curva e il piano dei carichi idrostatici dell'olio. Si ha, perciò:

$$F_{yolio} = -\gamma_{olio} \left[R(h_2 + h_3) - \frac{\pi R^2}{4} \right].$$

La risultante della forza esercitata dall'olio interseca l'asse di traccia O con angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\alpha_{olio} = \tan^{-1} \left(\frac{F_{yolio}}{F_{xolio}} \right).$$

L'acqua esercita una spinta orizzontale pari a:

$$F_{xacqua} = \gamma_{acqua} \left(h_1 + \frac{R}{2} \right) R$$

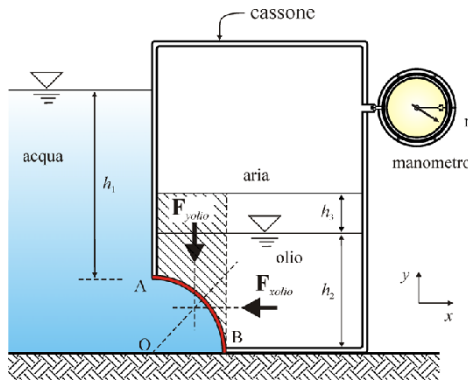


Figura 2.28. Schema per il calcolo delle spinte interne

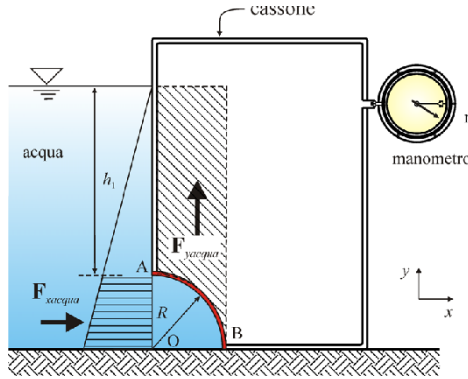


Figura 2.29. Schema per il calcolo delle spinte esterne

diretta verso destra, e una spinta verticale pari a:

$$F_{yacqua} = \gamma_{acqua} \left[(h_1 + R) R - \frac{\pi R^2}{4} \right]$$

diretta verso l'alto. Tale spinta verticale coincide, in modulo, con il peso del volume virtuale tratteggiato in Figura 2.29. La risultante della forza esercitata dall'acqua interseca l'asse di traccia O con angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\alpha_{acqua} = \tan^{-1} \left(\frac{F_{yacqua}}{F_{xacqua}} \right).$$

La spinta totale ha componente orizzontale pari a:

$$F_x = F_{xolio} + F_{xacqua}$$

e componente verticale pari a:

$$F_y = F_{yolio} + F_{yacqua}.$$

La spinta totale passa per il centro O, con angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$\gamma_{olio} = 8000 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{aria} = 0$, $h_1 = 3.00 \text{ m}$, $h_2 = 2.00 \text{ m}$, $R = 1.50 \text{ m}$, $n = p_{aria} = 0.20 \text{ bar}$

$$h_3 = \frac{p_{aria}}{\gamma_{olio}} = \frac{0.2 \times 10^5}{8000} = 2.5 \text{ m}$$

$$F_{xolio} = -\gamma_{olio} \left[h_3 + \left(h_2 - \frac{R}{2} \right) \right] R =$$

$$-8000 \times \left[2.5 + \left(2 - \frac{1.5}{2} \right) \right] \times 1.5 = -45.0 \text{ kN}$$

$$F_{yolio} = -\gamma_{olio} \left[R(h_2 + h_3) - \frac{\pi R^2}{4} \right] =$$

$$-8000 \times \left[1.5 \times (2 + 2.5) - \frac{\pi \times 1.5^2}{4} \right] = -39.9 \text{ kN}$$

$$F_{xacqua} = \gamma_{acqua} \left(h_1 + \frac{R}{2} \right) R = 9800 \times \left(3 + \frac{1.5}{2} \right) \times 1.5 = 55.1 \text{ kN}$$

$$F_{yacqua} = \gamma_{acqua} \left[(h_1 + R) R - \frac{\pi R^2}{4} \right] =$$

$$9800 \times \left[(3 + 1.5) \times 1.5 - \frac{\pi \times 1.5^2}{4} \right] = 48.8 \text{ kN}$$

$$F_x = F_{xolio} + F_{xacqua} = -45.0 + 55.1 = 10.1 \text{ kN}$$

$$F_y = F_{yolio} + F_{yacqua} = -39.9 + 48.8 = 8.9 \text{ kN}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{8.9}{10.1} \right) = 41^\circ 23'.$$

Esercizio 2.10

Nel sistema in Figura 2.30 la paratoia cilindrica, di profondità $L = (2 + C_u/2)$ m e di raggio $R = (4 + C_{pu}/2)$ m, avente asse di simmetria cilindrica di traccia C, è incernierata in O. L'angolo $\widehat{OCA} = 45^\circ$ e la distanza $\overline{OC} = R/2$. L'asse della cerniera non coincide con l'asse di simmetria cilindrica. La paratoia ha una battuta in A. Calcolare:

- la spinta esercitata dall'acqua sulla paratoia;
- la spinta orizzontale \mathbf{F} che è necessario applicare in B per aprire la paratoia.

◇ Trascurare il peso della paratoia.

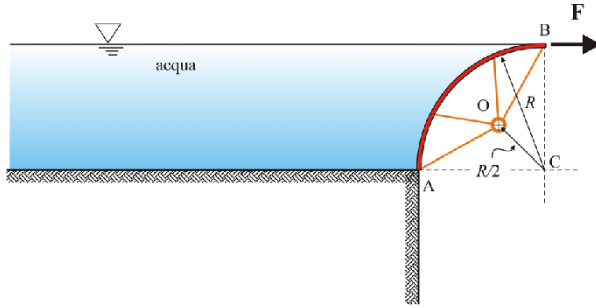


Figura 2.30. Paratoia cilindrica soggetta alla spinta dell'acqua

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.31, l'acqua esercita una spinta orizzontale verso destra pari a:

$$S_x = \frac{1}{2} \gamma R^2 L$$

e una spinta verticale, verso il basso, pari al peso del volume di fluido sovrastante la paratoia:

$$S_y = \gamma R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) L.$$

Il modulo della spinta totale è pari a:

$$|S| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \gamma R^2 L \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4 - \pi}{4}\right)^2}.$$

La spinta esercitata dall'acqua passa per l'asse di traccia C e forma un angolo, rispetto all'orizzontale, pari a:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{S_y}{S_x} \right) = \tan^{-1} \left[\frac{\gamma R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) L}{\frac{1}{2} \gamma R^2 L} \right] = \tan^{-1} \left(\frac{4 - \pi}{2} \right) = 23^\circ 13'.$$

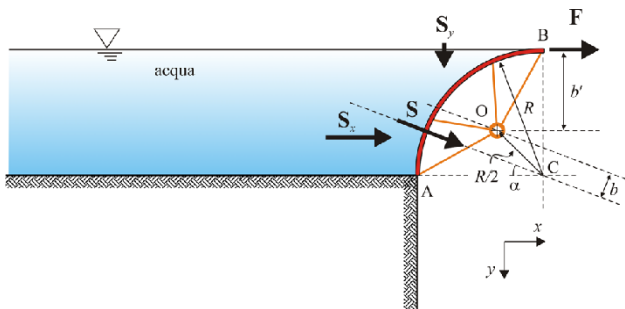


Figura 2.31. Schema per il calcolo delle forze agenti sulla paratoia cilindrica

Il braccio della spinta, rispetto all'asse di rotazione di traccia O, è pari a:

$$b = \frac{R}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \simeq 0.185R$$

e la coppia esercitata dalla spinta, rispetto a detto asse, è antioraria e di modulo pari a:

$$M_S = |\mathbf{S}| b = \left(\sqrt{S_x^2 + S_y^2} \right) b \simeq \gamma R^2 L \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4 - \pi}{4} \right)^2} \right] \times 0.185R.$$

Il braccio della forza \mathbf{F} è pari a:

$$b' = R - \frac{R}{2} \cos \frac{\pi}{4} = R \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{4} \right)$$

e la coppia esercitata rispetto all'asse di rotazione di traccia O, oraria se \mathbf{F} è diretta verso destra, ha modulo pari a:

$$M_F = |\mathbf{F}| b' = |\mathbf{F}| R \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{4} \right).$$

Imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse di traccia O, risulta:

$$M_S = M_F \rightarrow |\mathbf{F}| \simeq \frac{\gamma R^2 L \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4 - \pi}{4} \right)^2} \times 0.185R}{R \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{4} \right)}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$L = 2$ m, $R = 4$ m

$$S_x = \frac{1}{2} \gamma R^2 L = \frac{1}{2} \times 9806 \times 4^2 \times 2 = 156.90 \text{ kN}$$

$$S_y = \gamma R^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) L = 9806 \times 4^2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \times 2 = 67.34 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{156.9^2 + 67.34^2} = 170.74 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{F}| \simeq \frac{170.74 \times 0.185 \times 4}{4 \times \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{4} \right)} = 48.98 \text{ kN}.$$

Esercizio 2.11

Nel sistema in Figura 2.32 la paratoia cilindrica, di profondità $L = (2 + C_u/2)$ m e di raggio $R = (4 + C_{pu}/2)$ m, avente asse di simmetria cilindrica di traccia C, è incernierata in A. I due liquidi a sinistra hanno peso specifico $\gamma_1 = 11\,000 \text{ N/m}^3$ e $\gamma_2 = 10\,000 \text{ N/m}^3$. I tiranti sono pari a $h_1 = (1 + C_{pu}/4)$ m e $h_2 = (3 + C_{pu}/4)$ m. Calcolare:

- la spinta complessiva esercitata dai liquidi;
 - l'inclinazione sull'orizzontale della spinta;
 - la forza orizzontale \mathbf{F} che è necessario applicare in B per mantenere la paratoia in posizione.
- ◇ Trascurare il peso della paratoia.

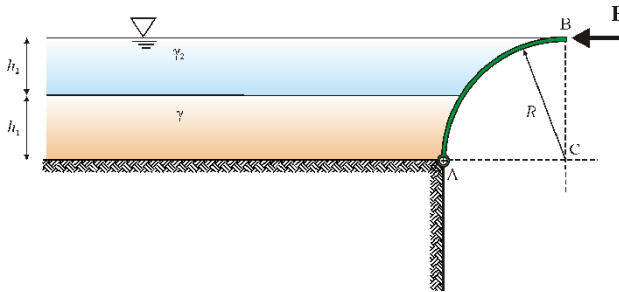


Figura 2.32. Paratoia cilindrica soggetta alla spinta di fluidi stratificati

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.33, il liquido superiore esercita una spinta orizzontale pari a:

$$S_{2x} = \frac{1}{2} \gamma_2 h_2^2 L$$

e una spinta verticale pari al peso del volume V_2 :

$$S_{2y} = \gamma_2 V_2 = \gamma_2 \left[R h_2 \sin \alpha_2 - \frac{R^2}{2} \alpha_2 + \frac{R(R - h_2)}{2} \sin \alpha_2 \right] L$$

con $\alpha_2 = \pi/2 - \alpha = \cos^{-1} [(R - h_2)/R]$.

La spinta risultante ha modulo $|\mathbf{S}_2| = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2}$ e interseca l'asse avente traccia coincidente con il centro di curvatura C, formando un angolo rispetto all'orizzontale pari a $\beta_2 = \tan^{-1} (S_{2y}/S_{2x})$. Il braccio rispetto all'asse della cerniera

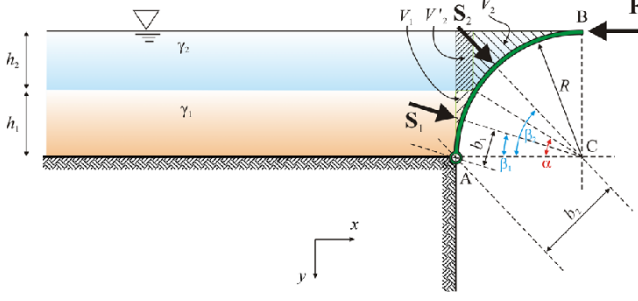


Figura 2.33. Schema per il calcolo delle spinte dei fluidi

in A è pari a:

$$b_2 = R \sin \beta_2$$

e la coppia, oraria, ha modulo $|\mathbf{M}_2| = b_2 |\mathbf{S}_2|$.

Il liquido inferiore esercita una spinta orizzontale pari a:

$$S_{1x} = \frac{1}{2} (\gamma_1 h_1 + 2\gamma_2 h_2) h_1 L$$

e una spinta verticale pari al peso del volume $V'_2 + V_1$:

$$S_{1y} = \gamma_2 V'_2 + \gamma_1 V_1 = \gamma_2 h_2 R (1 - \cos \alpha) L + \gamma_1 \left[R (1 - \cos \alpha) h_1 - \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{R}{2} h_1 \cos \alpha \right] L$$

con $\alpha = \sin^{-1} (h_1/R)$.

La spinta risultante ha modulo $|\mathbf{S}_1| = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2}$ e interseca l'asse con traccia coincidente con il centro di curvatura C, formando un angolo rispetto all'orizzontale pari a $\beta_1 = \tan^{-1} (S_{1y}/S_{1x})$. Il braccio rispetto all'asse della cerniera in A è pari a:

$$b_1 = R \sin \beta_1$$

e la coppia, oraria, ha modulo $|\mathbf{M}_1| = b_1 |\mathbf{S}_1|$.

La spinta totale interseca ancora l'asse con traccia coincidente con il centro di curvatura C, ha modulo:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{(S_{1x} + S_{2x})^2 + (S_{1y} + S_{2y})^2}$$

e forma un angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{S_{1y} + S_{2y}}{S_{1x} + S_{2x}} \right).$$

Il modulo della forza \mathbf{F} si ottiene imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse della cerniera A:

$$R |\mathbf{F}| = |\mathbf{M}_1| + |\mathbf{M}_2| = b_1 |\mathbf{S}_1| + b_2 |\mathbf{S}_2|.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$L = 2 \text{ m}, R = 4 \text{ m}, h_1 = 1 \text{ m}, h_2 = 3 \text{ m}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2} \gamma_2 h_2^2 L = \frac{1}{2} \times 10\,000 \times 3^2 \times 2 = 90 \text{ kN}$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{R - h_2}{R} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{4 - 3}{4} \right) = 75^\circ 31'$$

$$S_{2y} = \gamma_2 V_2 = \gamma_2 \left[R h_2 \sin \alpha_2 - \frac{R^2}{2} \alpha_2 + \frac{R(R - h_2)}{2} \sin \alpha_2 \right] L =$$

$$10\,000 \times \left[\frac{4.0 \times 3.0 \times \sin 75^\circ 31' - \frac{4.0^2}{2} \times \frac{75^\circ 31'}{180^\circ} \times \pi + \frac{4.0 \times (4.0 - 3.0)}{2} \times \sin 75^\circ 31' \right] \times 2.0 = 60.21 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{S}_2| = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2} = \sqrt{90.00^2 + 60.21^2} = 108.28 \text{ kN}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{S_{2y}}{S_{2x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{60.21}{90.00} \right) = 33^\circ 47'$$

$$b_2 = R \sin \beta_2 = 4.0 \times \sin 33^\circ 47' = 2.22 \text{ m}$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2} (\gamma_1 h_1 + 2\gamma_2 h_2) h_1 L =$$

$$\frac{1}{2} \times (11\,000 \times 1 + 2 \times 10\,000 \times 3) \times 1.0 \times 2.0 = 71.00 \text{ kN}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{h_1}{R} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{1.0}{4.0} \right) = 14^\circ 28'$$

$$S_{1y} = \gamma_2 h_2 R (1 - \cos \alpha) L + \gamma_1 \left[R (1 - \cos \alpha) h_1 - \frac{\alpha_1}{2} R^2 + \frac{R}{2} h_1 \cos \alpha \right] L =$$

$$10\,000 \times 3.0 \times 4.0 \times (1 - \cos 14^\circ 28') \times 2.0 +$$

$$11\,000 \times \left[\frac{4.0 \times (1 - \cos 14^\circ 28') \times 1.0 - \frac{14^\circ 28'}{180^\circ} \times \pi \times \frac{4.0^2}{2} + \frac{4.0}{2} \times 1.0 \times \cos 14^\circ 28' \right] \times 2.0 = 8.55 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{S}_1| = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2} = \sqrt{71.00^2 + 8.55^2} = 71.5 \text{ kN}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{S_{1y}}{S_{1x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{8.55}{71.00} \right) = 6^\circ 52'$$

$$b_1 = R \sin \beta_1 = 4.0 \times \sin 6^\circ 52' = 0.48 \text{ m}.$$

La spinta totale ha componenti:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} = 71.00 + 90.00 = 161.00 \text{ kN}$$

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} = 8.55 + 60.21 = 68.76 \text{ kN}$$

modulo:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{161.00^2 + 68.76^2} = 175.1 \text{ kN}$$

ed è inclinata sull'orizzontale di un angolo:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{S_y}{S_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{68.76}{161.00} \right) = 23^\circ 8'.$$

Il modulo della forza \mathbf{F} necessaria per l'equilibrio è pari a:

$$|\mathbf{F}| = \frac{b_1 |\mathbf{S}_1| + b_2 |\mathbf{S}_2|}{R} = \frac{0.48 \times 71.5 + 2.22 \times 108.28}{4.0} = 68.8 \text{ kN}$$

La forza deve essere applicata verso sinistra nello schema in Figura 2.33.

Esercizio 2.12

Nel sistema in Figura 2.34 la paratoia cilindrica, di profondità $L = (2 + C_u/2)$ m e di raggio $R = (4 + C_{pu}/2)$ m, è incernierata in A. Calcolare:

- la spinta \mathbf{P} che è necessario applicare per mantenere la paratoia in posizione;
 - la stessa spinta se la paratoia fosse incernierata in B.
- ◇ Trascurare il peso della paratoia.

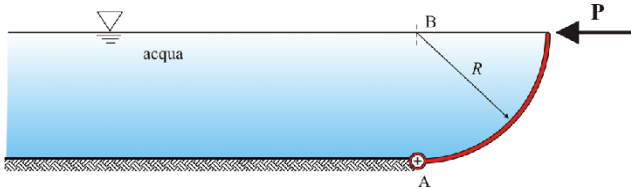


Figura 2.34. Paratoia cilindrica incernierata in A

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.35, la componente orizzontale della spinta esercitata dall'acqua è pari a:

$$F_x = \frac{1}{2} \gamma R^2 L.$$

La componente verticale della spinta esercitata dall'acqua è pari a:

$$F_y = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L.$$

Il modulo della spinta è pari a:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Dato che le forze elementari sono normali alla superficie e passanti per B, anche la forza integrale passa per B e forma un angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

Il braccio rispetto all'asse della cerniera in A ha la seguente espressione:

$$b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Il modulo della spinta \mathbf{P} si ottiene imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse della cerniera in A:

$$|\mathbf{P}| R = |\mathbf{F}| b \rightarrow |\mathbf{P}| = \frac{|\mathbf{F}| b}{R}.$$

Nel secondo caso la spinta necessaria è nulla, poiché la forza esercitata dall'acqua sulla paratoia ha braccio nullo rispetto al nuovo centro di rotazione B.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$L = 2 \text{ m}$, $R = 4 \text{ m}$

$$F_x = \frac{1}{2} \gamma R^2 L = \frac{1}{2} \times 9806 \times 4^2 \times 2 = 156\,896 \text{ N}$$

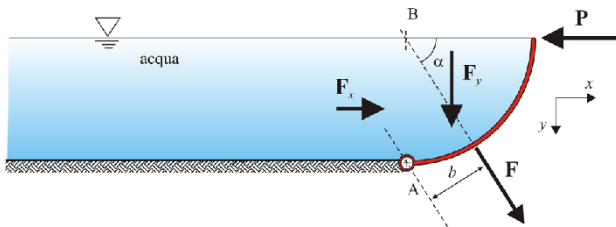


Figura 2.35. Schema per il calcolo delle spinte

$$F_y = \gamma \frac{\pi R^2}{4} L = 9806 \times \frac{\pi \times 4^2}{4} \times 2 = 246\,452 \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{156\,896^2 + 246\,452^2} = 292\,156 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{246\,452}{156\,896} \right) = 57^\circ 31'$$

$$b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 4 \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2.15 \text{ m}$$

$$|\mathbf{P}| R = |\mathbf{F}| b \rightarrow |\mathbf{P}| = \frac{|\mathbf{F}| b}{R} = \frac{292\,156 \times 2.15}{4} = 157 \text{ kN}.$$

Esercizio 2.13

Il serbatoio in pressione in Figura 2.36 contiene acqua ($\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$) e aria nella sua parte superiore; esso presenta sulla parete una rientranza verso l'acqua di forma conica di altezza b e diametro della base D . L'affondamento del vertice del cono vale h . L'aria sovrastante ha una pressione misurata dal manometro collegato alla parte superiore del serbatoio.

- Determinare modulo e inclinazione sull'orizzontale della spinta idrostatica sulla superficie conica.

◇ Dati numerici:

$$p_{aria} = (3 + C_u \times 0.1) \text{ bar}, \quad h = (1 + C_{pu} \times 0.5) \text{ m}, \quad b = (0.5 + C_{pu} \times 0.5) \text{ m}, \quad D = 0.30 \text{ m}.$$

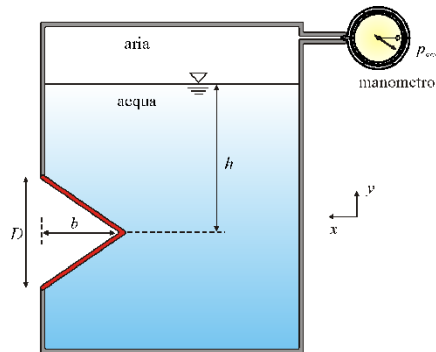


Figura 2.36. Serbatoio in pressione con superficie gobba di forma conica

Soluzione

Scegliamo il sistema di coordinate riportato in Figura 2.37. Applicando l'equazione globale di equilibrio statico al volume conico idealmente riempito di liquido (metodo dell'equazione globale) risulta:

$$\mathbf{\Pi}_0 + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

in cui $\mathbf{\Pi}_1$ è la spinta sulla superficie piana di forma circolare, \mathbf{G} è il peso dell'acqua che riempie idealmente il volume conico, $\mathbf{\Pi}_0$ è la spinta sulla superficie laterale del cono. Poiché la spinta idrostatica richiesta \mathbf{F} coincide con $\mathbf{\Pi}_0$ si ha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Pi}_0 = -\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{G}.$$

Dato che i vettori \mathbf{G} e $\mathbf{\Pi}_1$ sono rispettivamente verticale e orizzontale, è facile dedurre che la spinta idrostatica sul cono ha componente F_x pari al modulo di $\mathbf{\Pi}_1$ e cioè:

$$F_x = (\gamma_{acqua} h + p_{aria}) \frac{\pi D^2}{4}$$

ed è diretta verso sinistra.

La componente verticale F_y è diretta verso l'alto ed è pari al modulo di \mathbf{G} :

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^2 b}{4} \frac{3}{3}.$$

Il modulo della spinta è pari a:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

e l'inclinazione sull'orizzontale si calcola come segue:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right).$$

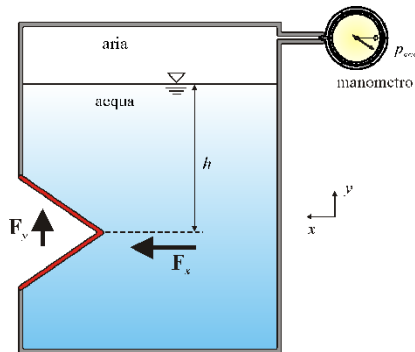


Figura 2.37. Schema per il calcolo delle spinte sulla superficie gobba di forma conica

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$p_{aria} = 3 \text{ bar}$, $h = 1 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $D = 0.30 \text{ m}$

$$F_x = (\gamma_{acqua}h + p_{aria}) \frac{\pi D^2}{4} = (9806 \times 1.0 + 3 \times 10^5) \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} = 21.90 \text{ kN}$$

$$F_y = \gamma_{acqua} \frac{\pi D^2}{4} \frac{b}{3} = 9806 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \frac{0.5}{3} = 0.11 \text{ kN}$$

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{21.90^2 + 0.11^2} = 21.90 \text{ kN}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.11}{21.90} \right) \cong 17'.$$

Esercizio 2.14

La paratoia in Figura 2.38 è profonda $b = 2 \text{ m}$ ed è incernierata in corrispondenza dell'asse di traccia O. Calcolare:

- la spinta totale esercitata dall'acqua;
- la retta d'azione della spinta;
- la forza **S** necessaria per aprire la paratoia.

◇ Trascurare il peso proprio della paratoia.

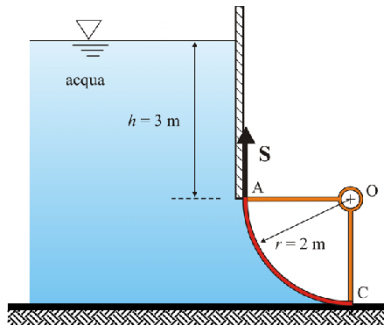


Figura 2.38. Paratoia cilindrica di chiusura di un serbatoio

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.39, la componente orizzontale di spinta è pari a:

$$F_x = \gamma \left(h + \frac{r}{2} \right) r b = 9806 \times \left(3 + \frac{2}{2} \right) \times 2 \times 2 = 156.9 \text{ kN}$$

e la componente verticale di spinta è pari a:

$$\begin{aligned} F_y &= \gamma h r b + \gamma \frac{\pi}{4} r^2 b = \gamma b \left(h r + \frac{\pi}{4} r^2 \right) = \\ &= 9806 \times 2 \times \left(3 \times 2 + \frac{\pi}{4} \times 2^2 \right) = 179.3 \text{ kN}. \end{aligned}$$

La spinta totale ha modulo:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{156.9^2 + 179.3^2} = 238.3 \text{ kN}$$

passa per l'asse di traccia O ed è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{179.3}{156.9} \right) \simeq 49^\circ.$$

La forza **S** necessaria per aprire la paratoia è nulla se si trascurano gli attriti e il peso proprio. Difatti, la spinta totale ha momento nullo rispetto all'asse di rotazione della paratoia.

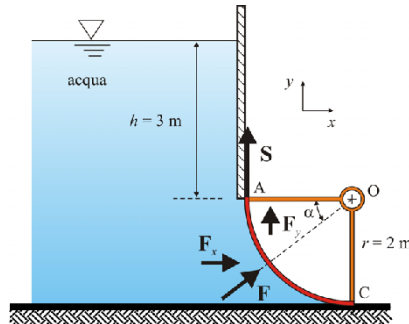


Figura 2.39. Schema per il calcolo delle spinte agenti sulla paratoia cilindrica

Esercizio 2.15

La paratoia basculante in Figura 2.40 è incernierata in corrispondenza dello spigolo.

- Calcolare il tirante D necessario per l'apertura della paratoia.
- ◇ Trascurare il peso proprio della paratoia. Il fluido è acqua.

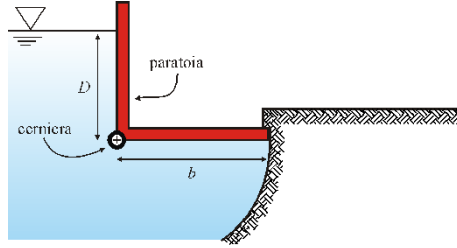


Figura 2.40. Paratoia basculante

Soluzione

Con riferimento allo schema in Figura 2.41, il fluido esercita una spinta orizzontale di modulo:

$$F_x = \frac{1}{2}\gamma D^2$$

per unità di lunghezza, applicata a distanza $D/3$ dalla cerniera. La coppia corrispondente (positiva se oraria nel sistema di coordinate prescelto) è pari a:

$$M_{F_x} = \frac{1}{6}\gamma D^3.$$

La spinta verticale è pari a:

$$F_y = \gamma Db$$

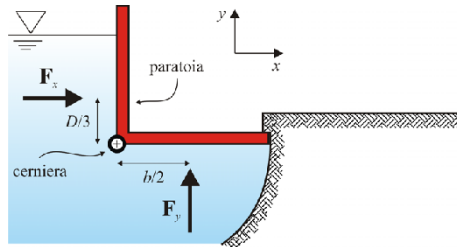


Figura 2.41. Schema per il calcolo delle spinte sulla paratoia

per unità di lunghezza, applicata a distanza $b/2$ dalla cerniera.

La coppia corrispondente (negativa, poiché antioraria) è pari a:

$$M_{F_y} = -\gamma D \frac{b^2}{2}.$$

Trascurando la coppia dovuta al peso della paratoia, la paratoia si apre se la coppia totale è positiva (oraria):

$$M_{F_x} + M_{F_y} > 0 \rightarrow \frac{1}{6}\gamma D^3 - \gamma D \frac{b^2}{2} \equiv \frac{\gamma D}{2} \left(\frac{1}{3}D^2 - b^2 \right) > 0$$

cioè se risulta $D > b\sqrt{3}$.

Esercizio 2.16

La paratoia in Figura 2.42 è un guscio di $3/8$ di un cilindro a base circolare; è profonda $l = 3$ m in direzione ortogonale al foglio, è vincolata con una cerniera in B e poggia senza attrito in A.

- Calcolare le reazioni vincolari in A e in B se il fluido è acqua di mare a peso specifico pari a $10\,050$ N/m³.

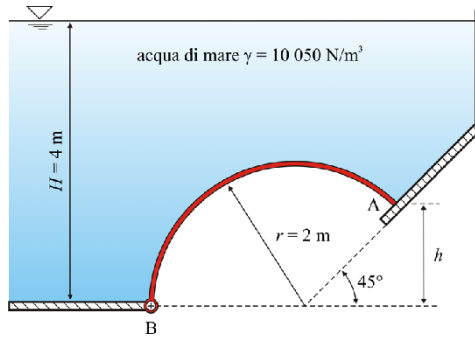


Figura 2.42. Paratoia cilindrica incernierata

Soluzione

Scegliamo il sistema di coordinate riportato in Figura 2.43. La spinta del fluido sulla superficie gobba si può calcolare come somma della spinta orizzontale e della spinta verticale.

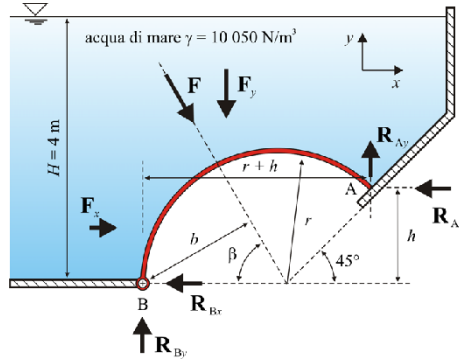


Figura 2.43. Schema per il calcolo delle spinte sulla paratoia

La spinta verticale è pari al peso del volume sovrastante la paratoia, ed è pari a:

$$F_y = -\gamma V = -\gamma l \left[(r+h) H - \frac{3}{8} \pi r^2 - \frac{h^2}{2} \right].$$

V è il volume delimitato da piani verticali per A e per B, dal pelo libero e dal guscio cilindrico, l è la profondità del guscio.

Poiché risulta:

$$h = r \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

sostituendo i valori numerici, la spinta verticale è pari a:

$$F_y = -\gamma V = -10\,050 \times 3 \times \left[(2 + \sqrt{2}) \times 4 - \frac{3}{8} \times \pi \times 2^2 - \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \right] = -240 \text{ kN}.$$

La spinta orizzontale è positiva verso destra ed è pari a:

$$F_x = \gamma \left(H - \frac{h}{2} \right) h l = 10\,050 \times \left(4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \times \sqrt{2} \times 3 = 140 \text{ kN}.$$

La spinta totale ha modulo:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{|\mathbf{F}_x|^2 + |\mathbf{F}_y|^2} = \sqrt{240^2 + 140^2} = 278 \text{ kN}$$

passa per l'asse del cilindro (si tratta di risultante di vettori elementari tutti concorrenti verso l'asse) e forma un angolo rispetto all'orizzontale pari a:

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-240}{140} \right) = -59^\circ 44'.$$

La reazione in A è ortogonale all'appoggio ed ha quindi, data la geometria, componenti secondo gli assi x e y di ugual modulo.

La reazione in B ha due componenti indipendenti secondo gli assi.

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse della cerniera in B, risulta:

$$-|\mathbf{F}|b + R_{Ay}(r + h) - R_{Ax}h = 0.$$

Il braccio b si calcola sulla base della geometria del sistema:

$$b = r \sin \beta = 2 \times \sin 59^\circ 44' = 1.73 \text{ m}$$

e, quindi:

$$R_{Ay} = -R_{Ax} = \frac{|\mathbf{F}|b}{(r + 2h)} = \frac{278 \times 1.73}{2 + 2\sqrt{2}} = 99 \text{ kN}.$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione x risulta:

$$R_{Bx} + F_x + R_{Ax} = 0$$

e, quindi:

$$R_{Bx} = -F_x - R_{Ax} = -140 + 99 = -41 \text{ kN}.$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione y risulta:

$$R_{By} + F_y + R_{Ay} = 0$$

e, quindi:

$$R_{By} = -F_y - R_{Ay} = 240 - 99 = 141 \text{ kN}.$$

Esercizio 2.17

Il serbatoio cilindrico in Figura 2.44 è pieno d'acqua fino all'estremità superiore della tubazione di immissione. Il serbatoio è lungo 1.0 m ed è ottenuto sovrapponendo due gusci semicilindrici ognuno di peso pari a 4.5 kN, di raggio $r = 2$ m e imbullonati lungo due generatrici con bulloni ogni 24 cm. Se il serbatoio è appoggiato su di un piano orizzontale, calcolare:

- la sollecitazione nei bulloni trascurando il contributo dei due fondi;
- la spinta ortogonale ai due fondi.

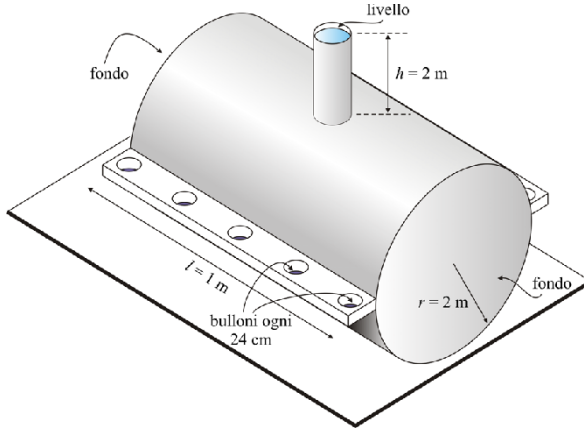


Figura 2.44. Serbatoio imbullonato

Soluzione

Consideriamo l'equilibrio del volume di controllo in Figura 2.45, di lunghezza l .

Agisce (1) il peso del fluido, verso il basso, pari a:

$$G = \gamma \frac{\pi r^2}{2} l$$

(abbiamo trascurato il peso del volume di fluido contenuto nel tubo di alimentazione).

(2) Il peso proprio del guscio semicilindrico, verso il basso, pari a:

$$P_p = 4500 \text{ N.}$$

(3) La spinta dovuta alla distribuzione di pressione sul piano meridiano orizzontale, verso l'alto, pari a:

$$S = -\gamma(r + h)2rl.$$

h è l'altezza del tubo di immissione.

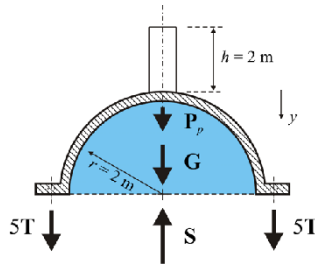


Figura 2.45. Volume di controllo e schema delle spinte e delle forze agenti

(4) La risultante della forza di trazione nei 10 bulloni, incognita, positiva verso il basso e pari a $10|\mathbf{T}|$.

All'equilibrio, risulta:

$$P_p + G + 10T + S = 0.$$

Sostituendo, risulta:

$$P_p + \gamma \frac{\pi r^2}{2} l + 10T - \gamma(r+h)2rl = 0$$

da cui si ricava:

$$T = \frac{\gamma(r+h)2rl - P_p - \gamma \frac{\pi r^2}{2} l}{10} =$$

$$\frac{9806 \times (2+2) \times 2 \times 2 \times 1 - 4500 - 9806 \times \frac{\pi \times 2^2}{2} \times 1}{10} = 9078 \text{ N.}$$

La spinta ortogonale a ognuno dei due fondi ha modulo pari a:

$$S_o = \gamma(r+h)\pi r^2 = 9806 \times (2+2) \times \pi \times 2^2 = 493 \text{ kN}$$

ed è diretta verso l'esterno.

Esercizio 2.18

Una sfera di legno di peso specifico relativo all'acqua pari a 0.6 separa i due contenitori in Figura 2.46. I due contenitori sono pressurizzati e la differenza di pressione è di 150 mm di mercurio (peso specifico relativo del mercurio pari a 13.6). Nel contenitore a sinistra c'è acqua e nel contenitore a destra c'è olio con peso specifico relativo all'acqua pari a 0.8.

- Calcolare le forze che agiscono sulla sfera.

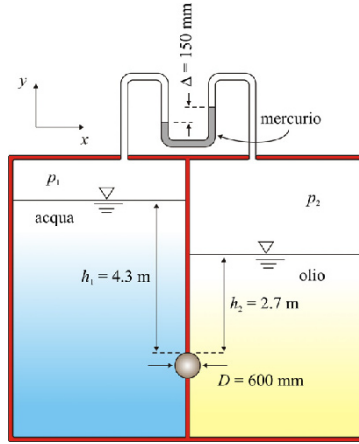


Figura 2.46. Serbatoi con tappo sferico nel setto di separazione

Soluzione

Scelto il sistema di coordinate in Figura 2.46, la spinta orizzontale esercitata dall'acqua è pari a:

$$F_{xacqua} = \left[\gamma_{acqua} \left(h_1 + \frac{D}{2} \right) + p_1 \right] \frac{\pi D^2}{4}$$

e quella esercitata dall'olio è pari a:

$$F_{xolio} = - \left[\gamma_{olio} \left(h_2 + \frac{D}{2} \right) + p_2 \right] \frac{\pi D^2}{4}.$$

La spinta orizzontale risultante è pari a:

$$F_x = F_{xacqua} + F_{xolio} = \left[\gamma_{acqua} \left(h_1 + \frac{D}{2} \right) - \gamma_{olio} \left(h_2 + \frac{D}{2} \right) + p_1 - p_2 \right] \frac{\pi D^2}{4}.$$

La differenza di pressione $p_1 - p_2$, trascurando il peso specifico dell'aria, è pari a:

$$p_1 - p_2 = \gamma_{Hg} \Delta.$$

Quindi, risulta:

$$\begin{aligned} F_x &= \left[\gamma_{acqua} \left(h_1 + \frac{D}{2} \right) - \gamma_{olio} \left(h_2 + \frac{D}{2} \right) + \gamma_{Hg} \Delta \right] \frac{\pi D^2}{4} = \\ &= \left[9806 \times \left(4.3 + \frac{0.6}{2} \right) - 0.8 \times 9806 \times \left(2.7 + \frac{0.6}{2} \right) + 13.6 \times 9806 \times 0.15 \right] \times \frac{\pi \times 0.6^2}{4} \\ &= 11.76 \text{ kN}. \end{aligned}$$

La componente verticale della forza agente sulla sfera, incluso il peso proprio della sfera, è pari a:

$$F_y = \underbrace{\gamma_{acqua} \frac{\pi D^3}{12}}_{\text{spinta di Archimede in acqua}} + \underbrace{\gamma_{olio} \frac{\pi D^3}{12}}_{\text{spinta di Archimede in olio}} - \underbrace{\gamma_{legno} \frac{\pi D^3}{6}}_{\text{peso proprio}} =$$

$$(9806 + 0.8 \times 9806 - 2 \times 0.6 \times 9806) \times \frac{\pi \times 0.6^3}{12} = 332 \text{ N.}$$

Esercizio 2.19

Dell'acqua in pressione riempi il contenitore in Figura 2.47.

- Calcolare la spinta totale sulla superficie conica se il manometro indica un pressione relativa pari a 150 kPa.

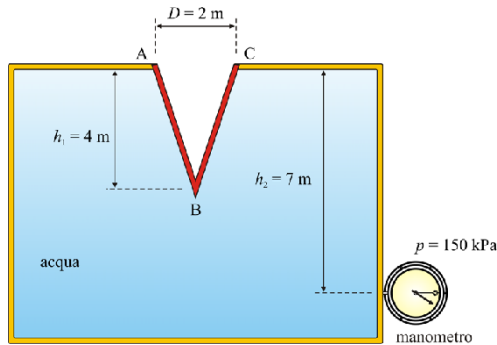


Figura 2.47. Serbatoio pressurizzato con superficie gobba conica

Soluzione

Scelto il volume di controllo tratteggiato in Figura 2.48, la componente verticale di spinta si ottiene scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{0}.$$

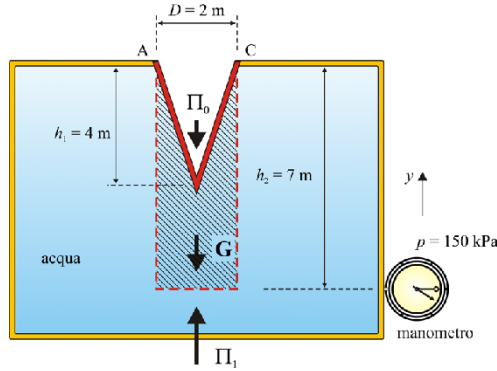


Figura 2.48. Schema per il calcolo delle spinte sulla superficie gobba conica

Π_0 è la spinta esercitata dal cono sul volume di controllo, $\mathbf{F} = -\Pi_0$ è la spinta esercitata dal volume di controllo sulla superficie conica, \mathbf{G} è il peso del fluido contenuto nel volume, Π_1 è la spinta dovuta alla pressione che agisce sulla base del cilindro di altezza h_2 e base coincidente con la base del cono.

Le forze hanno le seguenti espressioni:

$$G = -\gamma \frac{\pi D^2}{4} \left(h_2 - \frac{h_1}{3} \right) = -9806 \times \frac{\pi \times 2^2}{4} \times \left(7 - \frac{4}{3} \right) = -174.57 \text{ kN}$$

$$\Pi_1 = p \frac{\pi D^2}{4} = 150\,000 \times \frac{\pi \times 2^2}{4} = 471.24 \text{ kN}.$$

Quindi:

$$\Pi_0 = -G - \Pi_1 = 174.57 - 471.24 = -296.67 \text{ kN} \rightarrow$$

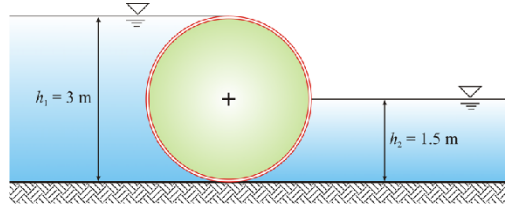
$$F = -\Pi_0 = 296.67 \text{ kN}.$$

Pertanto, la spinta sulla superficie conica è diretta verso l'alto. La spinta orizzontale è nulla per simmetria.

Esercizio 2.20

Una paratoia cilindrica ha un diametro $D = 3 \text{ m}$ ed una lunghezza (profondità nella direzione ortogonale al disegno in Figura 2.49) $l = 6 \text{ m}$.

- Calcolare modulo, direzione e verso della spinta totale esercitata dall'acqua sulla paratoia.

**Figura 2.49.** Paratoia cilindrica**Soluzione**

Con riferimento allo schema in Figura 2.50, il fluido 1 a sinistra esercita una spinta orizzontale S_{1x} verso destra pari a:

$$S_{1x} = \frac{1}{2} \gamma h_1^2 l = 0.5 \times 9806 \times 3^2 \times 6 = 265 \text{ kN.}$$

Esercita, inoltre, una spinta verticale S_{1y} verso l'alto pari alla spinta di Archimede di metà paratoia:

$$S_{1y} = \frac{1}{2} \gamma \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{1}{8} \times 9806 \times \pi \times 3^2 \times 6 = 208 \text{ kN.}$$

La spinta risultante \mathbf{S}_1 avrà direzione radiale con inclinazione sull'orizzontale di un angolo:

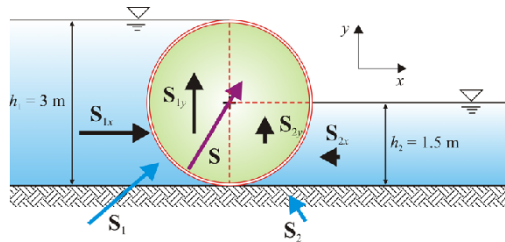
$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{S_{1y}}{S_{1x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{208}{265} \right) = 38^\circ 6'.$$

Il fluido 2 a destra esercita una spinta orizzontale S_{2x} verso sinistra pari a:

$$S_{2x} = -\frac{1}{2} \gamma h_2^2 l = -0.5 \times 9806 \times 1.5^2 \times 6 = -66 \text{ kN.}$$

Esercita, inoltre, una spinta verticale S_{2y} verso l'alto pari alla spinta di Archimede di un quarto di paratoia:

$$S_{2y} = \frac{1}{4} \gamma \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{1}{16} \times 9806 \times \pi \times 3^2 \times 6 = 104 \text{ kN.}$$

**Figura 2.50.** Sistema di forze agenti sulla paratoia cilindrica

La spinta risultante \mathbf{S}_2 avrà direzione radiale con inclinazione sull'orizzontale di un angolo:

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{S_{2y}}{S_{2x}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{104}{66} \right) = 57^\circ 36'.$$

La composizione delle componenti orizzontali ha per risultante una spinta S_x positiva e pari a:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} = 199 \text{ kN}.$$

La composizione delle componenti verticali ha per risultante una spinta S_y positiva (diretta verso l'alto) avente modulo:

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} = 312 \text{ kN}.$$

La spinta totale ha modulo:

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{199^2 + 312^2} = 370 \text{ kN}$$

passa per l'asse del cilindro con inclinazione sull'orizzontale pari a:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{S_y}{S_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{312}{199} \right) = 57^\circ 28'.$$

Esercizio 2.21

Una sfera di raggio R è costituita di materiale di peso specifico relativo s ed è immersa in un serbatoio d'acqua (Figura 2.51). La sfera occlude un foro di raggio a al fondo del serbatoio. Calcolare:

- l'espressione generale del peso specifico relativo s , in funzione di H , R ed a , necessario affinché la sfera galleggi;
- il minimo valore di s necessario affinché, con i dati numerici riportati in Figura 2.51, la sfera rimanga nella posizione di chiusura del foro.

Soluzione

La sfera è soggetta al peso del cilindro di fluido V_1 rappresentato in Figura 2.52, al peso proprio e alla spinta di Archimede relativa alla porzione di volume immerso nel fluido.

Per semplificare il calcolo, il volume V_2 viene aggiunto sia al volume di fluido sovrastante la sfera sia al volume per il calcolo della spinta di Archimede (l'effetto

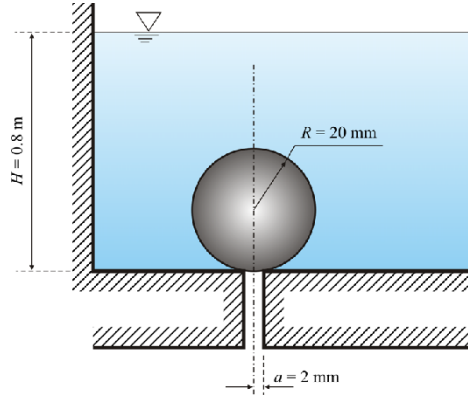


Figura 2.51. Sfera di tenuta al fondo di un serbatoio

globale è nullo, poiché il peso del fluido sovrastante la sfera e la spinta di Archimede hanno stessa direzione, hanno punti di applicazione allineati lungo la verticale ma hanno verso contrario). Quindi:

$$\mathbf{S}_y + \mathbf{G}_{V_1+V_2} + \mathbf{P} + \mathbf{S}_A = \mathbf{0}$$

$$G_{V_1+V_2} = \gamma \pi a^2 H$$

$$P = \gamma_{mat} \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$S_A = -\gamma \frac{4\pi R^3}{3}$$

(il raggio del foro a è molto minore di R).

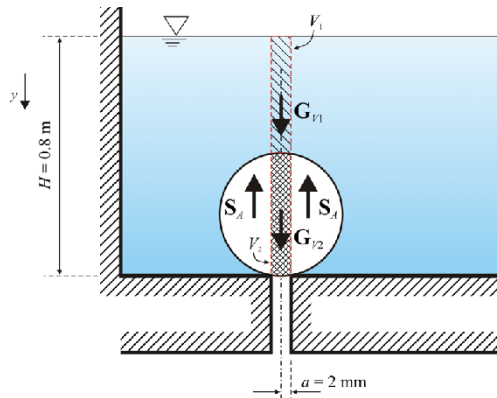


Figura 2.52. Schema per il calcolo delle spinte sulla sfera

Tenuto conto del verso delle forze, risulta:

$$S_y = \gamma \pi a^2 H + \gamma_{mat} \frac{4\pi R^3}{3} - \gamma \frac{4\pi R^3}{3}$$

nel sistema di coordinate adottato. Per il galleggiamento è necessario che:

$$S_y < 0$$

cioè:

$$\begin{aligned} \pi a^2 H + \frac{\gamma_{mat}}{\gamma} \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} < 0 \rightarrow \\ \frac{\gamma_{mat}}{\gamma} = s < \frac{\frac{4\pi R^3}{3} - \pi a^2 H}{\frac{4\pi R^3}{3}} \rightarrow s < 1 - \frac{3a^2 H}{4R^3}. \end{aligned}$$

Con i dati numerici forniti, la condizione limite di equilibrio ci permette di calcolare:

$$s_{min} = 1 - \frac{3 \times (2 \times 10^{-3})^2 \times 0.8}{4 \times (20 \times 10^{-3})^3} = 0.7.$$

Esercizio 2.22

Il tappo di sughero in Figura 2.53, di forma irregolare e peso specifico relativo $s = 0.45$, chiude un foro circolare di raggio $r = 15$ mm al fondo di un contenitore pieno d'acqua. Il volume immerso in acqua del tappo, tratteggiato in figura, è pari a $V_{imm} = 3600$ mm³, il volume totale del tappo è pari a $V = 4200$ mm³.

- Calcolare la forza totale agente sul tappo.

Soluzione

Le forze orizzontali agenti sul tappo sono equilibrate, mentre in direzione verticale il tappo è soggetto alla spinta di Archimede (verso l'alto) per il volume V' tratteggiato in Figura 2.54, al peso dell'acqua sovrastante contenuta nel volume V'' (verso il basso) e al peso proprio (verso il basso).

La forza totale agente è pari a:

$$F_z = s\gamma V - \gamma V' + \gamma V''.$$

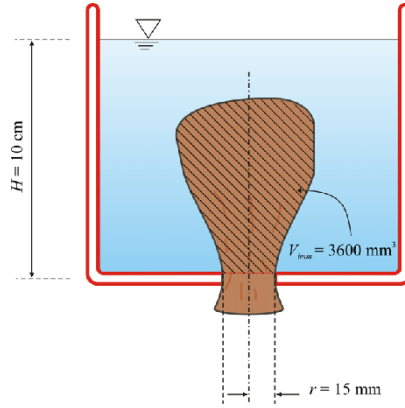


Figura 2.53. Tappo al fondo di un serbatoio

Sommando e sottraendo $\gamma V'''$, risulta:

$$F_z = s\gamma V - \underbrace{\gamma(V' + V''')}_{V_{imm}} + \gamma(V'' + V''').$$

Il secondo contributo è la spinta di Archimede relativa a tutto il volume del tappo immerso, mentre il terzo contributo coincide con il peso del volume cilindrico di altezza H e base circolare di raggio r riempito d'acqua, e si calcola come segue:

$$\gamma(V'' + V''') = \gamma H \pi r^2.$$

Quindi, risulta:

$$F_z = s\gamma V - \gamma V_{imm} + \gamma H \pi r^2.$$

Si noti che per il calcolo del modulo della forza idrostatica agente, è sufficiente conoscere solo il volume del corpo immerso e l'area della sezione trasversale del

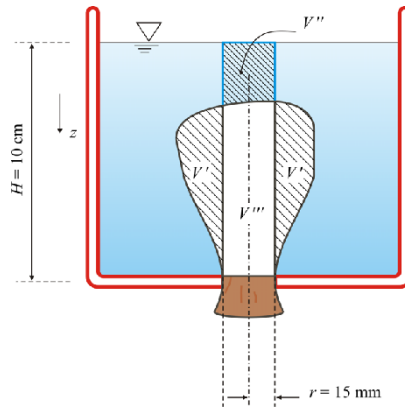


Figura 2.54. Schema per il calcolo delle spinte agenti sul tappo

foro occluso (che non deve essere necessariamente circolare), indipendentemente dalla forma del tappo e dalla sua eventuale asimmetria. Le informazioni sulla forma del corpo immerso sono, invece, necessarie se si vuole anche calcolare il punto di applicazione della forza.

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$F_z = s\gamma V - \gamma V_{imm} + \gamma H\pi r^2 =$$

$$9806 \times \left(\frac{0.45 \times 4200 \times 10^{-9} - 3600 \times 10^{-9}}{0.1 \times \pi \times 15^2 \times 10^{-6}} + \right) = 0.68 \text{ N}.$$

Tale forza, positiva nel sistema di coordinate scelto, è diretta verso il basso.

Galleggianti

Esercizio 3.1

Una trave di legno galleggiante in acqua è incernierata in uno spigolo come riportato in Figura 3.1. La trave, di profondità unitaria, è in equilibrio nella configurazione geometrica riportata nel disegno.

- Calcolare il peso specifico relativo del legno se l'attrito in corrispondenza della cerniera è trascurabile.
- ◇ Si assuma: $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$, $L = (1.00 + C_u/10) \text{ m}$, $D = (0.50 + C_{pu}/20) \text{ m}$.

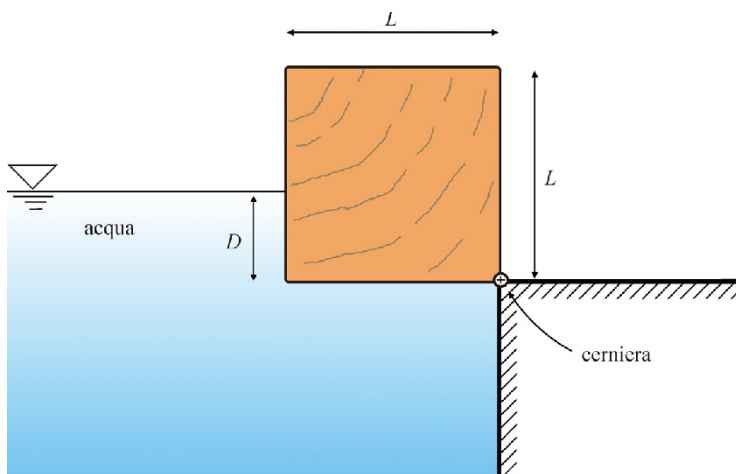


Figura 3.1. Trave di legno galleggiante incernierata in uno spigolo

Soluzione

La trave è in equilibrio alla rotazione se la coppia risultante di tutte le forze agenti è nulla rispetto all'asse della cerniera. Con riferimento allo schema in Figura 3.2, le forze agenti sono la spinta idrostatica sulla base della trave (per unità di lunghezza), pari a:

$$F_{Ay} = \gamma_{acqua} L D$$

che ha braccio $L/2$ rispetto all'asse della cerniera; il peso proprio (per unità di lunghezza):

$$G_y = -\gamma_{acqua} s L^2$$

(s è il peso specifico relativo del legno rispetto all'acqua) che ha braccio $L/2$ rispetto all'asse della cerniera; la spinta orizzontale dell'acqua sulla parete verticale sinistra della trave (per unità di lunghezza):

$$S_x = \frac{1}{2} \gamma_{acqua} D^2$$

che ha braccio $D/3$ rispetto all'asse della cerniera.

Imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'asse della cerniera, risulta:

$$(F_{Ay} + G_y) \frac{L}{2} + S_x \frac{D}{3} = 0 \rightarrow \gamma_{acqua} \frac{L^2 D}{2} - s \gamma_{acqua} \frac{L^3}{2} + \gamma_{acqua} \frac{D^3}{6} = 0$$

quindi:

$$s = \frac{D}{L} + \frac{D^3}{3L^3}.$$

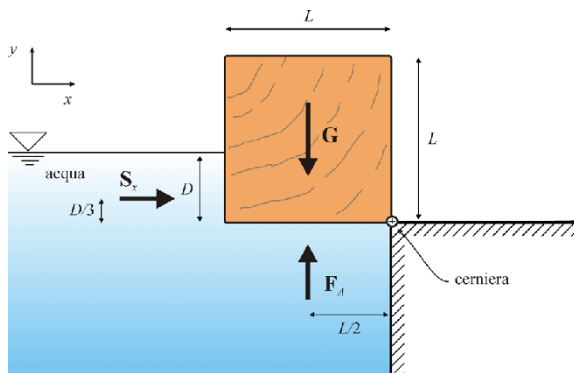


Figura 3.2. Schema delle forze agenti

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$L = 1.00 \text{ m}, D = 0.50 \text{ m}$$

$$s = \frac{D}{L} + \frac{D^3}{3L^3} = \frac{0.5}{1.0} + \frac{(0.5)^3}{3 \times (1.0)^3} = 0.54.$$

Esercizio 3.2

La sfera in Figura 3.3 è in equilibrio tra due liquidi di peso specifico $\gamma_1 = 7 \text{ kN/m}^3$ e $\gamma_2 = 9 \text{ kN/m}^3$ e il piano di separazione tra i due liquidi passa per il suo baricentro.

- Determinare il peso specifico del materiale della sfera.

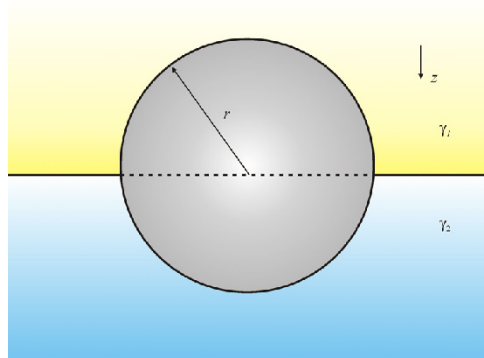


Figura 3.3. Sfera galleggiante all'interfaccia tra due liquidi

Soluzione

La sfera è in equilibrio verticale sotto l'azione del peso proprio e della spinta dei due liquidi. L'equazione di equilibrio in direzione verticale è la seguente:

$$G_z + \Pi_{1z} + \Pi_{2z} = 0.$$

Il peso proprio è pari a:

$$G_z = \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma_{sfera}.$$

La spinta del liquido 1 si riconduce alla spinta di Archimede relativa al volume di sfera immerso nel liquido 1 ed è diretta verso l'alto:

$$\Pi_{1z} = -\frac{2}{3}\pi r^3 \gamma_1.$$

La spinta del liquido 2 è pari alla spinta di Archimede relativa al volume di sfera immerso nel liquido 2, ed è pari a:

$$\Pi_{2z} = -\frac{2}{3}\pi r^3 \gamma_2$$

ed è diretta verso l'alto.

All'equilibrio, risulta:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \gamma_{sfera} - \frac{2}{3}\pi r^3 \gamma_1 - \frac{2}{3}\pi r^3 \gamma_2 = 0.$$

Sostituendo, si calcola:

$$\gamma_{sfera} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{7 + 9}{2} = 8 \text{ kN/m}^3.$$

Esercizio 3.3

Un cilindro a sezione circolare è vincolato con una cerniera (Figura 3.4) ed è in equilibrio in acqua quando all'estremità libera è appesa una sfera di piombo (peso specifico relativo all'acqua pari a 11.4) di massa pari a 2 kg.

- Determinare il peso specifico del materiale del cilindro.
- Determinare la reazione della cerniera.
- Studiare, inoltre, la stabilità dell'equilibrio al variare della quota del pelo libero rispetto alla quota della cerniera.

◇ Il fluido circostante è acqua.

Soluzione

Con riferimento allo schema riportato in Figura 3.5, sul cilindro e sulla sfera agiscono le seguenti forze:

- 1) il peso proprio del cilindro applicato nel baricentro, positivo verso il basso, pari a:

$$P_t = \gamma_m V.$$

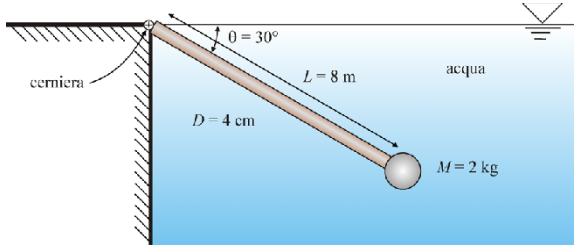


Figura 3.4. Cilindro incernierato con massa di piombo all'estremità libera

- 2) La spinta di Archimede applicata nel centro di carena del cilindro, verso l'alto, pari a:

$$S_{At} = -\gamma V.$$

- 3) Il peso proprio della sfera di piombo applicato nel baricentro della sfera, verso il basso, pari a:

$$P_s = mg.$$

- 4) La spinta di Archimede applicata nel centro di carena della sfera, verso l'alto, pari a:

$$S_{As} = -\gamma V_{sfera} = -\frac{\gamma mg}{\gamma_{Pb}}.$$

- 5) La reazione della cerniera, sicuramente diretta lungo la verticale (non ci sono spinte orizzontali da equilibrare) e di modulo e verso incogniti.

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione, risulta:

$$\gamma_m V + mg - \gamma V - \frac{\gamma mg}{\gamma_{Pb}} + R = 0.$$

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse della cerniera (ortogonale al foglio), trascurando le dimensioni della sfera di piombo (considerando, quindi,

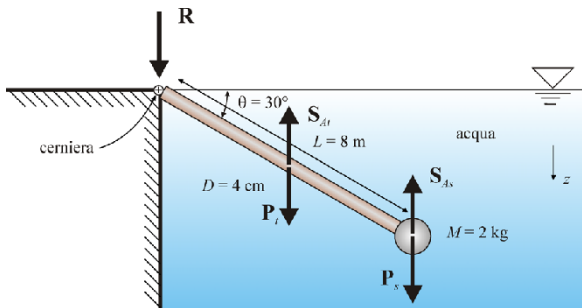


Figura 3.5. Schema delle forze agenti

le forze applicate all'estremità del cilindro), è la seguente:

$$(\gamma_m - \gamma) V \frac{L}{2} \cos \theta + mg \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} \right) L \cos \theta = 0.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\gamma_m = \gamma - 2 \frac{mg}{\frac{\pi D^2}{4} l} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} \right) = 9806 - 2 \times \frac{2 \times 9.806}{\frac{\pi \times 0.04^2}{4} \times 8} \times \left(1 - \frac{1}{11.4} \right) = 6245 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

La reazione nella cerniera è pari a:

$$R = (\gamma - \gamma_m) V + mg \left(\frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} - 1 \right).$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$R = (9806 - 6245) \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} \times 8 + 2 \times 9.806 \times \left(\frac{1}{11.4} - 1 \right) = -13.4 \text{ N}.$$

Quindi, la reazione della cerniera è diretta verso l'alto. Si noti che l'angolo assegnato pari a 30° è un dato sovrabbondante.

Stabilità dell'equilibrio

- Se il pelo libero è a quota superiore alla quota della cerniera, non cambia nulla rispetto al caso già studiato. L'equilibrio è *indifferente*.
- Se il pelo libero decresce lasciando comunque immersa tutta la sfera di piombo, la reazione si riduce in modulo per cambiare poi anche il verso. L'angolo di inclinazione della barra è univocamente definito poiché la spinta di Archimede della parte immersa del cilindro è funzione di θ . Indichiamo con h la distanza del pelo libero dalla cerniera, secondo lo schema riportato in Figura 3.6.

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale è la seguente:

$$\gamma_m V + mg - \gamma V \left(1 - \frac{h}{L \sin \theta} \right) - \frac{\gamma mg}{\gamma_{Pb}} + R = 0$$

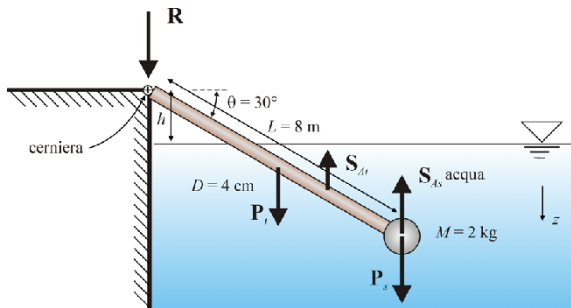


Figura 3.6. Schema delle forze agenti nel caso di cilindro parzialmente immerso in acqua

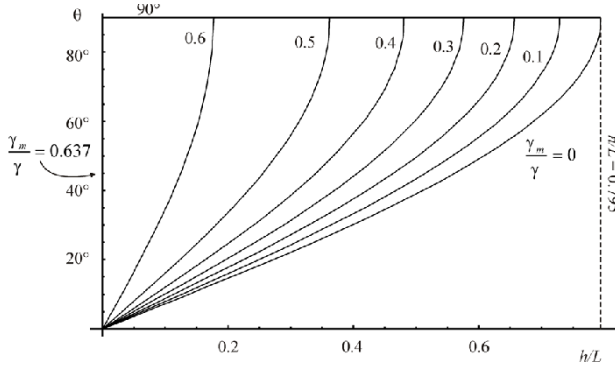


Figura 3.7. Angolo di equilibrio in funzione del livello dell'acqua rispetto alla cerniera e per differenti valori del peso specifico relativo del materiale del cilindro

e l'equazione di equilibrio alla rotazione è la seguente:

$$\gamma_m V \frac{L}{2} \cos \theta - \gamma V \left(1 - \frac{h}{L \sin \theta} \right) \left(\frac{L}{2} \cos \theta + \frac{h}{2 \tan \theta} \right) + mg \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} \right) L \cos \theta = 0$$

che, semplificata, si riduce a:

$$\frac{h}{L \sin \theta} = \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) - \frac{2mg}{\gamma V} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} \right)}.$$

È necessario che l'argomento della radice sia positivo, cioè deve risultare:

$$\frac{\gamma_m}{\gamma} < 1 - \frac{2mg}{\gamma V} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_{Pb}} \right).$$

Inoltre, la soluzione rispetta le ipotesi purché risulti:

$$\frac{h}{L \sin \theta} < 1.$$

Infatti, se $h > L \sin \theta$ la sfera è sul pelo libero e la spinta di Archimede sulla sfera deve essere calcolata con riferimento alla quota parte di volume di sfera immerso. L'angolo di equilibrio è diagrammato in Figura 3.7 in funzione di h/L e del peso specifico relativo del materiale del cilindro.

Considerato che la coppia oraria dovuta al peso e alla spinta di Archimede sulla sfera si riduce, all'aumentare di h , solo perché si riduce il braccio, mentre la coppia antioraria dovuta al peso e alla spinta di Archimede sul cilindro si riduce sia per la riduzione del braccio che per la riduzione della spinta di Archimede, è ragionevole aspettarsi che esista un valore limite di h oltre il quale l'angolo di equilibrio sia pari a 90° . Tale valore limite è diagrammato, in funzione del peso specifico relativo del materiale, in Figura 3.8. Oltre tale condizione limite, l'unico equilibrio stabile e possibile è per $\theta = 90^\circ$.

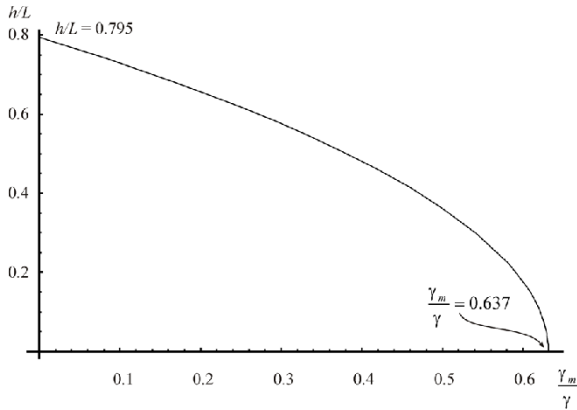


Figura 3.8. Valore limite del livello dell'acqua rispetto alla cerniera in funzione del peso specifico relativo del materiale del cilindro

- c) Se il pelo libero decresce ulteriormente lasciando scoperta anche tutta la sfera, l'angolo θ è pari a 90° , la spinta di Archimede è nulla, la reazione nella cerniera è massima, positiva verso l'alto, in modulo pari alla somma del peso del cilindro e della sfera di piombo. L'equilibrio è *stabile*.

Esercizio 3.4

Il tronco di legno in Figura 3.9 è immerso in acqua ed è vincolato al fondo da un tirante. Determinare:

- la forza di trazione nel tirante;
 - il peso specifico del legno.
- ◇ Studiare, inoltre, la stabilità dell'equilibrio al variare della profondità dell'acqua H .

Soluzione

Con riferimento allo schema riportato in Figura 3.10, le forze che agiscono sul tronco sono:

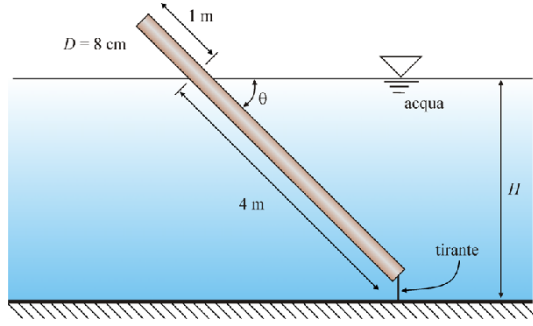


Figura 3.9. Tronco galleggiante con tirante al fondo

- 1) la spinta di Archimede, applicata nel baricentro del volume immerso (centro di carena), verso l'alto e pari a:

$$S_A = -\gamma V_i = -\gamma \frac{4}{5} V_{tot}.$$

V_i è il volume immerso, V_{tot} è il volume totale del tronco; γ è il peso specifico del fluido (acqua);

- 2) il peso del tronco, applicato nel baricentro del corpo, verso il basso e pari a:

$$P = \gamma_m V_{tot}.$$

γ_m è il peso specifico del legno;

- 3) la forza del tirante, necessariamente di trazione, verso il basso e pari a T .

Possiamo scrivere la seguente equazione di equilibrio alla traslazione verticale:

$$-\gamma \frac{4}{5} V_{tot} + \gamma_m V_{tot} + T = 0$$

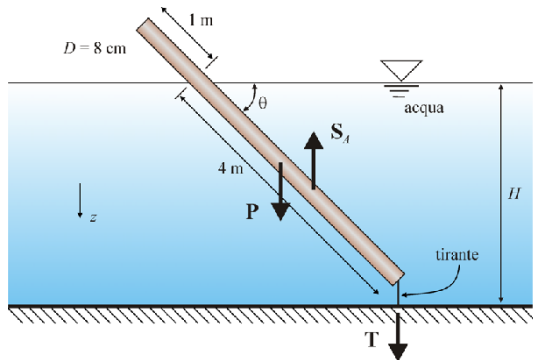


Figura 3.10. Schema delle forze agenti

e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno all'asse ortogonale al foglio e passante per il punto di applicazione della forza di trazione del tirante:

$$\gamma \frac{4}{5} V_{tot} \frac{l_{imm} \cos \theta}{2} - \gamma_m V_{tot} \frac{l_{tot} \cos \theta}{2} = 0.$$

l_{imm} è la lunghezza della parte immersa del tronco, l_{tot} è la lunghezza totale del tronco.

Dalla Figura 3.9 si ricava $l_{imm} = 4/5 l_{tot}$.

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione si ricava immediatamente che:

$$\frac{\gamma_m}{\gamma} = \frac{16}{25}$$

e, quindi:

$$T = \gamma \left(\frac{4}{5} V_{tot} - \frac{16}{25} V_{tot} \right) = \frac{4}{25} \gamma V_{tot} = \frac{1}{4} \gamma_m V_{tot} = \frac{P}{4}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\gamma_m = \frac{16}{25} \gamma = \frac{16}{25} \times 9806 = 6275 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

e:

$$T = \frac{1}{4} \gamma_m V_{tot} = \frac{1}{4} \times 6275 \times \frac{\pi \times 0.08^2}{4} \times 5 = 39.4 \text{ N}.$$

L'angolo di inclinazione θ dipenderà solo dal tirante H e dalla lunghezza del tronco.

Stabilità dell'equilibrio

Trascuriamo la lunghezza del tirante.

- Se $H < (4/5)l_{tot}$ (ma H sufficiente ad evitare che il tronco tocchi il fondo), l'angolo θ dipende solo dalla geometria. Poiché se $\gamma_m/\gamma = 16/25$ deve anche essere $l_{imm}/l_{tot} = 4/5$, per H crescente il cilindro tende a ruotare e assume una configurazione geometrica con $\theta = \sin^{-1}[5H/(4l_{tot})]$. L'equilibrio è stabile, la forza di trazione nel tirante è costante e pari a $P/4$.
- Se $(4/5)l_{tot} < H < l_{tot}$ l'angolo θ è pari a 90° e la trazione nel tirante cresce linearmente fino a raggiungere il valore massimo pari a $(9/16)P$. L'equilibrio è stabile.
- Se $H > l_{tot}$ l'angolo θ è ancora pari a 90° e la forza di trazione nel tirante è costante e pari al valore massimo. L'equilibrio è stabile.

Esercizio 3.5

Il blocco d'acciaio in Figura 3.11 galleggia all'interfaccia tra mercurio e acqua. Il peso specifico relativo all'acqua dell'acciaio è pari a $\gamma_{Fe}/\gamma_{acqua} = 7.85$, il peso specifico relativo del mercurio è pari a $\gamma_{Hg}/\gamma_{acqua} = 13.56$. Calcolare:

- il rapporto a/b all'equilibrio;
 - il rapporto l/b necessario per la stabilità dell'equilibrio alla rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano del foglio.
- ◇ Assumere una profondità unitaria del blocco.

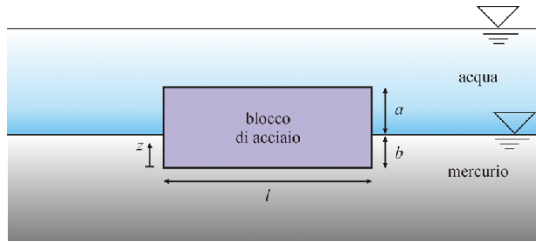


Figura 3.11. Blocco parallelepipedo galleggiante all'interfaccia tra due liquidi

Soluzione

La condizione di equilibrio al galleggiamento si ottiene imponendo che la spinta di Archimede eguagli il peso del blocco, cioè che risulti:

$$\gamma_{Hg}lb + \gamma_{acqua}la = \gamma_{Fe}l(a + b).$$

Risolvendo, risulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma_{Hg} - \gamma_{Fe}}{\gamma_{Fe} - \gamma_{acqua}} = 0.834.$$

Per lo studio della stabilità dell'equilibrio alle piccole rotazioni attorno ad un asse ortogonale al foglio, calcoliamo anzitutto la posizione del baricentro. Scelto un sistema di coordinate avente origine sulla base del blocco e positivo verso l'alto, il baricentro avrà coordinata:

$$z_G = \frac{a + b}{2}$$

e, quindi:

$$\frac{z_G}{b} = \frac{a/b + 1}{2} = \frac{0.834 + 1}{2} = 0.917.$$

Calcoliamo la posizione del centro di carena. Il centro di carena rappresenta il punto di applicazione della spinta di galleggiamento, che si può calcolare imponendo l'equivalenza tra il sistema di vettori applicati rappresentato dalle due spinte

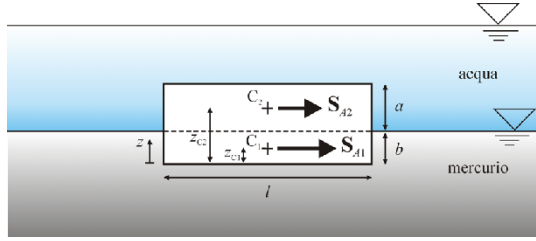


Figura 3.12. Schema per il calcolo del centro di carena

di galleggiamento (dovute all'acqua e al mercurio, rispettivamente) e il vettore risultante.

Tale equivalenza richiede anche che il momento del vettore risultante rispetto a un qualunque asse sia uguale alla somma vettoriale dei momenti delle due spinte di galleggiamento rispetto al medesimo asse. Si dimostra che il risultato non varia se si ruotano i due vettori dello stesso angolo. Per chiarezza e semplicità, ruotiamo \mathbf{S}_{A1} e \mathbf{S}_{A2} in modo da renderli orizzontali (Figura 3.12). In realtà sono colineari e diretti lungo la verticale. Ad esempio, rispetto all'origine del sistema di coordinate prescelto, risulta:

$$S_{A2}z_{C2} + S_{A1}z_{C1} = S_A z_C \rightarrow \gamma_{acqua} a l \left(\frac{a}{2} + b \right) + \gamma_{Hg} b l \frac{b}{2} = (\gamma_{acqua} a l + \gamma_{Hg} b l) z_C$$

e, quindi:

$$\frac{z_C}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{a}{b} \left(\frac{a}{2b} + \frac{1}{2} \right)}{\frac{a}{b} + \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{acqua}}}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\frac{z_C}{b} = \frac{1}{2} + \frac{0.834 \times \left(\frac{0.834}{2} + \frac{1}{2} \right)}{0.834 + \frac{13.56}{1}} = 0.553.$$

La distanza relativa tra il centro di carena e il baricentro è pari a:

$$\frac{z_G - z_C}{b} = 0.917 - 0.553 = 0.364$$

con il centro di carena più basso del baricentro. In queste condizioni la stabilità non è garantita, ma è necessario verificare la posizione del metacentro.

Nell'ipotesi di piccole rotazioni di rollio (rotazione intorno ad un asse ortogonale al disegno), la distanza tra il centro di carena e il metacentro si calcola come segue:

$$z_M - z_C = \frac{(\gamma_{Hg} - \gamma_{acqua}) I_{Gxx}}{\gamma_{Hg} b l + \gamma_{acqua} a l}.$$

Il momento d'inerzia della superficie di sponda rispetto all'asse di rotazione baricentrico vale $I_{Gxx} = \frac{1}{12}l^3$. Sostituendo, risulta:

$$\frac{z_M - z_C}{b} = \frac{\left(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{acqua}} - 1\right) \frac{1}{12} \frac{l^2}{b^2}}{\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{acqua}} + \frac{a}{b}} = \frac{\left(\frac{13.56}{1} - 1\right) \times \frac{1}{12} \times \frac{l^2}{b^2}}{\frac{13.56}{1} + 0.834} = 0.0727 \frac{l^2}{b^2}.$$

Per la stabilità dell'equilibrio è necessario che:

$$\frac{z_M - z_C}{b} > \frac{z_G - z_C}{b}$$

e, quindi:

$$0.0727 \frac{l^2}{b^2} > 0.364 \rightarrow \frac{l}{b} > 2.237.$$

Verifichiamo i risultati nel caso in cui sia trascurabile il peso specifico del fluido superiore (acqua) rispetto a quello del fluido inferiore (mercurio). In tal caso il galleggiamento si avrà imponendo che:

$$\gamma_{Hg}lb = \gamma_{Fe}l(a+b).$$

Risolvendo, risulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_{Fe}} - 1 = 0.727.$$

Il baricentro avrà coordinata:

$$z_G = \frac{a+b}{2}$$

e, quindi:

$$\frac{z_G}{b} = \frac{a/b + 1}{2} = \frac{0.727 + 1}{2} = 0.864.$$

Il centro di carena avrà coordinata:

$$\frac{z_C}{b} = \frac{1}{2}.$$

La distanza tra baricentro e centro di carena sarà pari a:

$$\frac{z_G - z_C}{b} = 0.864 - 0.5 = 0.364$$

con il centro di carena più basso del baricentro.

La distanza tra il centro di carena e il metacentro si calcola come segue:

$$z_M - z_C = \frac{I_{Gxx}}{bl}.$$

Sostituendo l'espressione del momento d'inerzia baricentrico della superficie di sponda, risulta:

$$\frac{z_M - z_C}{b} = \frac{1}{12} \frac{l^2}{b^2}.$$

Per la stabilità dell'equilibrio è necessario che:

$$\frac{z_M - z_C}{b} > \frac{z_G - z_C}{b}$$

cioè:

$$\frac{1}{12} \frac{l^2}{b^2} > 0.364 \rightarrow \frac{l}{b} > 2.09.$$

Tale risultato è quasi uguale a quello ottenuto considerando anche l'azione del fluido sovrastante.

Se il fluido sovrastante fosse stato aria, i risultati relativi alla condizione di stabilità dell'equilibrio analizzata includendo o trascurando il fluido sovrastante sarebbero stati praticamente coincidenti. Ciò varrebbe anche se il fluido sottostante fosse acqua. È per questa ragione che, di norma, nello studio della stabilità dell'equilibrio delle imbarcazioni si trascura sempre l'azione dell'aria.

Esercizio 3.6

Il cilindro in Figura 3.13 galleggia in acqua ed è incernierato per tutta la sua profondità.

- Calcolare il peso specifico relativo del materiale del cilindro in funzione del rapporto $\alpha = H/R$ per $0 \leq \alpha < 1$.
- ◊ L'attrito in corrispondenza della cerniera è trascurabile.

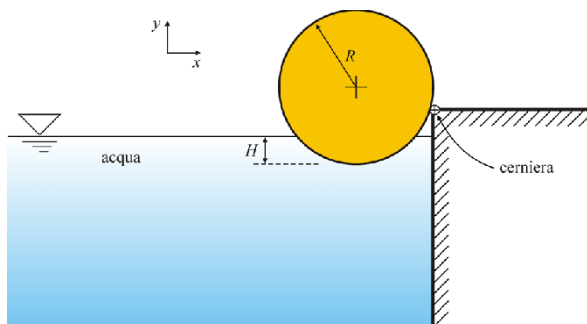


Figura 3.13. Cilindro galleggiante incernierato lungo la generatrice

Soluzione

Le forze agenti sul cilindro sono:

- la forza peso, applicata nel baricentro e diretta verso il basso;
- la spinta di galleggiamento, applicata nel centro di carena e diretta verso l'alto;
- la reazione del vincolo, passante necessariamente per l'asse della cerniera.

Le prime due forze sono sempre allineate verticalmente a causa della simmetria del corpo. Dovendo avere coppia nulla rispetto all'asse della cerniera, devono avere ugual modulo. Quindi, la reazione della cerniera è nulla, poiché non esistono forze agenti orizzontali.

All'equilibrio risulta:

$$-|\mathbf{P}| + |\mathbf{S}_A| = 0.$$

Il peso del cilindro per unità di profondità ha modulo:

$$|\mathbf{P}| = \gamma_{mat}\pi R^2.$$

La spinta di Archimede per unità di profondità ha modulo:

$$|\mathbf{S}_A| = \gamma_{acqua} A.$$

A è la sezione trasversale del volume di carena, pari a:

$$A = R^2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{H}{R} \right) - R^2 \left(1 - \frac{H}{R} \right) \sqrt{2 \frac{H}{R} - \left(\frac{H}{R} \right)^2}.$$

Sostituendo, risulta:

$$-\gamma_{mat}\pi R^2 + \gamma_{acqua} \left[R^2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{H}{R} \right) - R^2 \left(1 - \frac{H}{R} \right) \sqrt{2 \frac{H}{R} - \left(\frac{H}{R} \right)^2} \right] = 0$$

e in funzione di α risulta:

$$\frac{\gamma_{mat}}{\gamma_{acqua}} = \frac{\cos^{-1}(1 - \alpha) - (1 - \alpha) \sqrt{2\alpha - \alpha^2}}{\pi}.$$

Esercizio 3.7

L'imbarcazione in Figura 3.14 trasporta olio ($\gamma_{olio} = 0.8 \times \gamma_{acqua}$) galleggiante su uno strato d'acqua. Il peso dello scafo è di $(3000 + 100 \times C_{pu})$ N per metro di profondità. La larghezza è $b = (10 + C_u)$ m, lo spessore dello strato d'acqua è $y_1 = 1.5$ m e lo spessore dello strato d'olio è $y_2 = 2.0$ m.

- Calcolare l'affondamento y_3 dell'imbarcazione se è immersa in acqua.
- ◇ Si assuma $\gamma_{acqua} = 9806$ N/m³.

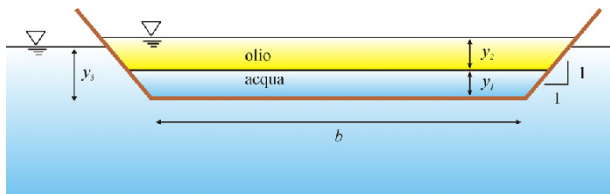


Figura 3.14. Chiatte galleggiante contenente liquidi stratificati

Soluzione

L'equilibrio in direzione verticale è soddisfatto se la spinta di Archimede eguaglia il peso dello scafo e del suo contenuto. La spinta di Archimede per unità di profondità dello scafo (in direzione ortogonale al foglio), è pari al prodotto del volume di carena e del peso specifico dell'acqua:

$$F_A = (b + y_3) y_3 \gamma_{acqua}$$

ed è diretta verso l'alto.

Il peso dello scafo e del suo contenuto, per unità di profondità, è pari a:

$$P = P_{scafo} + \gamma_{acqua} (b + y_1) y_1 + \gamma_{olio} (b + 2y_1 + y_2) y_2$$

ed è diretto verso il basso.

Eguagliando e risolvendo la seguente equazione di secondo grado in y_3 :

$$\underbrace{(b + y_3) y_3 \gamma_{acqua}}_{V_{carena}} = \underbrace{P_{scafo} + \gamma_{acqua} (b + y_1) y_1 + \gamma_{olio} (b + 2y_1 + y_2) y_2}_P$$

si calcola l'affondamento dello scafo.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$P_{scafo} = 3 \text{ kN/m}, b = 10.0 \text{ m}, y_1 = 1.5 \text{ m}, y_2 = 2.0 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} P &= P_{scafo} + \gamma_{acqua} (b + y_1) y_1 + \gamma_{olio} (b + 2y_1 + y_2) y_2 = \\ &= 3000 + 9806 \times (10 + 1.5) \times 1.5 + 0.8 \times 9806 \times (10 + 2 \times 1.5 + 2.0) \times 2.0 = \\ &= 407.5 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

$$(b + y_3) y_3 \gamma_{acqua} = P \rightarrow$$

$$(10.0 + y_3) y_3 \times 9806 = 407500$$

che ammette la seguente soluzione fisicamente accettabile:

$$y_3 = 3.16 \text{ m}.$$

Esercizio 3.8

Il dispositivo in Figura 3.15 è un misuratore di livello differenziale. I due cilindri, di peso specifico γ_m , sono collegati da un cavo inestensibile sospeso ad una puleggia di diametro $D_p = 200 \text{ mm}$. I cilindri hanno diametro $D_1 = D_2 = 150 \text{ mm}$ ed altezza $h_1 = h_2 = h = 400 \text{ mm}$ e lo sviluppo del cavo è $L = 1000 \text{ mm}$.

Nell'ipotesi che la coppia di attrito all'asse della puleggia sia trascurabile:

- analizzare il comportamento del sistema al variare del livello assoluto e del dislivello nei due pozzetti di misura, se $\gamma_m < \gamma$;
 - eseguire la stessa analisi se $\gamma_m > \gamma$.
- ◊ Analizzare, inoltre, gli effetti di una coppia d'attrito all'asse della puleggia pari a $M = 5 \times 10^{-3} \text{ Nm}$.

Soluzione

Consideriamo l'equilibrio dei due cilindri, soggetti al peso proprio, alla spinta di Archimede e alla trazione del cavo.

In assenza di coppia d'attrito all'asse della puleggia, la forza di trazione nel cavo è uniforme. L'affondamento dei due cilindri si calcola sulla base delle due equazioni di equilibrio seguenti:

$$\begin{cases} \gamma_m \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \gamma \frac{\pi D_1^2}{4} \Delta_1 - T = 0 \\ \gamma_m \frac{\pi D_2^2}{4} h_2 - \gamma \frac{\pi D_2^2}{4} \Delta_2 - T = 0. \end{cases}$$

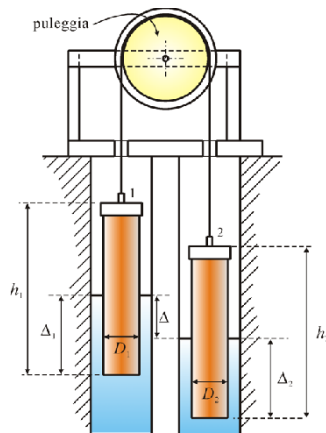


Figura 3.15. Misuratore di livello differenziale a cilindri galleggianti

Sottraendo membro a membro, risulta:

$$\gamma_m \left(\frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \frac{\pi D_2^2}{4} h_2 \right) - \gamma \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \Delta_1 - \frac{\pi D_2^2}{4} \Delta_2 \right) = 0.$$

Se i diametri dei due cilindri sono uguali ($D_1 = D_2 = D$), risulta:

$$\begin{aligned} \gamma_m \frac{\pi D^2}{4} (h_1 - h_2) - \gamma \frac{\pi D^2}{4} (\Delta_1 - \Delta_2) &= 0 \rightarrow \\ (\Delta_1 - \Delta_2) &= \frac{\gamma_m (h_1 - h_2)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Ciò significa che lo scarto tra gli affondamenti dei due cilindri ($\Delta_1 - \Delta_2$) è indipendente dal livello del fluido nei due pozzetti. Pertanto, se il livello in un pozzetto si mantiene fisso e il livello nell'altro pozzetto varia, il cavetto scorrerà di un valore

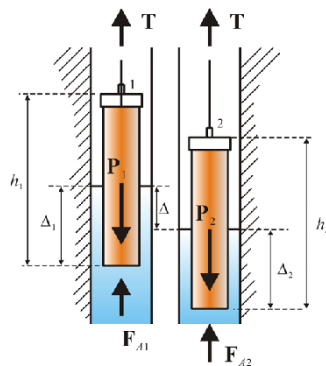


Figura 3.16. Schema delle forze agenti

esattamente pari alla variazione differenziale di livello e l'angolo di rotazione della puleggia sarà linearmente proporzionale alla differenza di livello tra i due pozzetti:

$$\alpha \propto \frac{\Delta}{D_p}.$$

Il dispositivo è un misuratore di livello differenziale con caratteristica lineare. Nel primo caso ($\gamma_m < \gamma$) il dispositivo non funziona più da misuratore di livello differenziale quando la trazione nel cavo si annulla, cioè quando si verifica la condizione:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{\gamma_m}{\gamma} h_1 \\ \Delta_2 = \frac{\gamma_m}{\gamma} h_2. \end{cases}$$

Ciò equivale alla condizione di cilindri galleggianti con la spinta di Archimede in grado di sostenerli senza la trazione nel cavo.

L'analisi del range di funzionamento può essere condotta riferendosi (1) al livello medio del pelo libero nei due pozzetti e (2) all'escursione del pelo libero nei due pozzetti intorno a tale livello medio.

Scelto un sistema di coordinate z con l'origine posta alla quota dell'asse della puleggia (Figura 3.17), assumendo $h_1 = h_2 = h$ la condizione limite precedente permette di calcolare una delle due posizioni limite del livello medio:

$$\max z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right)$$

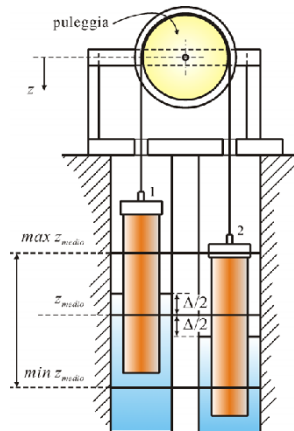


Figura 3.17. Schema per la definizione del range di misura

che, per il caso in esame, diventa:

$$\begin{aligned} \max z_{medio} &= \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) \rightarrow \\ &\left(1000 - \frac{\pi \times 200}{2} \right) \times \frac{1}{2} + 400 \times \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma} \right) = 742.9 - 400 \frac{\gamma_m}{\gamma} \text{ mm.} \end{aligned}$$

L'altra posizione limite del livello medio corrisponde alla condizione di cilindri sospesi fuori dall'acqua (la spinta di Archimede è nulla e i cilindri sono sostenuti solo dalla trazione nel cavo) e dipende dalla geometria del sistema:

$$\min z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h$$

e, per il caso in esame, diventa:

$$\min z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h \rightarrow \left(1000 - \frac{\pi \times 200}{2} \right) \times \frac{1}{2} + 400 = 742.9 \text{ mm.}$$

Sulla base dei risultati precedenti, il range di escursione del livello medio è pari a:

$$|\max z_{medio} - \min z_{medio}| = h \frac{\gamma_m}{\gamma}.$$

Il range di escursione del livello differenziale nei pozzetti, pari a $\pm\Delta/2$ rispetto al livello medio, dipende solo dalla geometria del sistema, cioè dalla lunghezza del cavo e dall'altezza dei cilindri.

Nel secondo caso ($\gamma_m > \gamma$) il dispositivo non funziona più da misuratore di livello differenziale se il livello nei pozzetti è tale da far affondare o emergere completamente i due cilindri. A differenza del caso in cui $\gamma_m < \gamma$, la trazione nel cavo non si annulla mai.

La prima condizione (cilindri completamente affondati) si traduce in una posizione limite del livello medio pari a:

$$\max z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} \rightarrow \left(1000 - \frac{\pi \times 200}{2} \right) \times \frac{1}{2} = 342.9 \text{ mm.}$$

La seconda condizione (cilindri completamente fuori acqua) porta a calcolare l'altra posizione limite del livello medio, che dipende dalla geometria del sistema ed è pari a:

$$\min z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h$$

e che, per il caso in esame, diventa:

$$\min z_{medio} = \left(L - \frac{\pi D_p}{2} \right) \frac{1}{2} + h \rightarrow \left(1000 - \frac{\pi \times 200}{2} \right) \times \frac{1}{2} + 400 = 742.9 \text{ mm.}$$

Il range di escursione del livello medio è pari a:

$$|max z_{medio} - min z_{medio}| = h.$$

Si noti che questo valore è maggiore del valore calcolato nel caso in cui risulti $\gamma_m < \gamma$.

Anche in questo caso il range di escursione del livello differenziale nei pozzetti, pari a $\pm\Delta/2$ rispetto al livello medio, dipende solo dalla geometria del sistema, cioè dalla lunghezza del cavo e dall'altezza dei cilindri.

Se includiamo l'effetto della coppia d'attrito, la trazione nel cavo non è necessariamente uniforme e le due equazioni di equilibrio per i due cilindri si riscrivono come segue:

$$\begin{cases} \gamma_m \frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \gamma \frac{\pi D_1^2}{4} \Delta_1 - T = 0 \\ \gamma_m \frac{\pi D_2^2}{4} h_2 - \gamma \frac{\pi D_2^2}{4} \Delta_2 - T \pm \frac{2M}{D_p} = 0. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro, risulta:

$$\gamma_m \left(\frac{\pi D_1^2}{4} h_1 - \frac{\pi D_2^2}{4} h_2 \right) - \gamma \left(\frac{\pi D_1^2}{4} \Delta_1 - \frac{\pi D_2^2}{4} \Delta_2 \right) \mp \frac{2M}{D_p} = 0.$$

Se i diametri dei due cilindri sono uguali ($D_1 = D_2 = D$), risulta:

$$\begin{aligned} \gamma_m \frac{\pi D^2}{4} (h_1 - h_2) - \gamma \frac{\pi D^2}{4} (\Delta_1 - \Delta_2) \mp \frac{2M}{D_p} &= 0 \rightarrow \\ (\Delta_1 - \Delta_2) &= \frac{\gamma_m (h_1 - h_2)}{\gamma} \mp \frac{8M}{\gamma \pi D^2 D_p}. \end{aligned}$$

Rispetto all'analisi in assenza di coppia d'attrito, si rileva un'incertezza nella stima che è sistematica e porta a una sottostima del livello differenziale se il dislivello sta aumentando, ad una sovrastima se il dislivello sta diminuendo. Si può dimostrare che l'incertezza nella stima di $(\Delta_1 - \Delta_2)$ è uguale all'incertezza nella stima del livello differenziale:

$$\delta (\Delta_1 - \Delta_2) \equiv \delta (\Delta).$$

Nel caso in esame tale incertezza è pari a:

$$\delta (\Delta_1 - \Delta_2) \equiv \delta (\Delta) = \pm \frac{8M}{\gamma \pi D^2 D_p} = \pm \frac{8 \times 5 \times 10^{-3}}{9806 \times \pi \times 0.15^2 \times 0.2} = \pm 0.3 \text{ mm}$$

e si può ridurre aumentando il diametro della puleggia e dei cilindri.

Esercizio 3.9

Il cassone galleggiante in calcestruzzo in Figura 3.18 è di sezione orizzontale quadrata con pareti di spessore $d = 15$ cm e fondo di spessore $2d$. Il lato esterno è di lunghezza $l = (2.0 + 0.01 \times C_u)$ m e l'altezza è $H = (3.2 + 0.1 \times C_{pu})$ m. Verificare:

- il galleggiamento;
 - la stabilità dell'equilibrio per piccole rotazioni attorno ad un asse orizzontale.
- ◇ Si assuma il peso specifico del calcestruzzo $\gamma_{cls} = 24$ kN/m³ e il peso specifico dell'acqua di mare $\gamma = 10.15$ kN/m³.

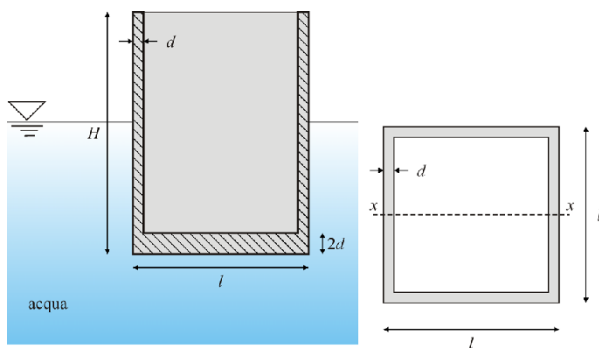


Figura 3.18. Cassone galleggiante

Soluzione

Si consideri lo schema riportato in Figura 3.19. Per l'equilibrio al galleggiamento (equilibrio alla traslazione verticale) è necessario che la spinta di Archimede sia uguale al peso del cassone:

$$\gamma_{cls} V_{cassone} = \gamma V_{carena}.$$

Il volume del cassone è pari a:

$$V_{cassone} = l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d)$$

e il volume di carena è pari a:

$$V_{carena} = l^2 h.$$

h è la porzione di cassone immerso.

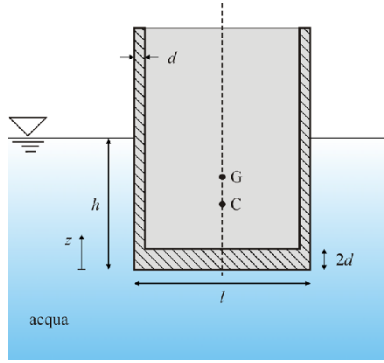


Figura 3.19. Schema per il calcolo del baricentro e del centro di carena

Quindi:

$$\gamma_{cls} \left[l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d) \right] = \gamma l^2 h \rightarrow h = \frac{\gamma_{cls} \left[l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d) \right]}{\gamma l^2}.$$

Per la stabilità dell'equilibrio alle piccole rotazioni intorno ad un asse orizzontale ortogonale al foglio è necessario che il centro di carena sia a quota superiore del baricentro. Se ciò non è verificato, è sufficiente che il metacentro si trovi al di sopra del baricentro, cioè:

$$z_M - z_C > z_G - z_C.$$

Nell'ipotesi di piccole rotazioni di rollio (rotazione intorno ad un asse ortogonale al disegno), la distanza tra il centro di carena e il metacentro si calcola come segue:

$$z_M - z_C = \frac{I_{Gxx}}{V_{carena}}.$$

I_{Gxx} è il momento d'inerzia assiale della sezione di galleggiamento rispetto ad un asse parallelo all'asse di rotazione e baricentrico. Nel caso di sezione quadrata, risulta:

$$I_{Gxx} = \frac{1}{12} l^4.$$

La posizione del baricentro si calcola suddividendo il cassone in volumi elementari, ad esempio il fondo e le pareti. Quindi, si eguaglia il momento statico di tutto il cassone con la somma dei momenti statici dei volumi elementari. Il momento statico del fondo, rispetto ad un piano orizzontale passante per l'origine del sistema di coordinate fissate, vale:

$$S_{zfondo} = 2d^2 l^2.$$

Il momento statico delle pareti vale:

$$S_{zpareti} = [2(l - 2d)d + 2ld](H - 2d) \left(\frac{H - 2d}{2} + 2d \right).$$

Il momento statico del cassone è pari a:

$$S_{zcassone} = \left[l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d) \right] z_G.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S_{zcassone} &= S_{zfondo} + S_{zpareti} \rightarrow \left[l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d) \right] z_G = \\ &2d^2 l^2 + [2(l - 2d)d + 2ld](H - 2d) \left(\frac{H - 2d}{2} + 2d \right) \rightarrow \\ &2d^2 l^2 + [2(l - 2d)d + 2ld](H - 2d) \left(\frac{H - 2d}{2} + 2d \right) \\ z_G &= \frac{2d^2 l^2 + [2(l - 2d)d + 2ld](H - 2d) \left(\frac{H - 2d}{2} + 2d \right)}{l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d)}. \end{aligned}$$

La distanza tra centro di carena e baricentro è pari a $z_G - z_C$ e l'equilibrio è stabile se:

$$z_M - z_C > z_G - z_C.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$d = 15 \text{ cm}, l = 2.00 \text{ m}, H = 3.2 \text{ m}, \gamma_{cls} = 24 \text{ kN/m}^3, \gamma = 10.15 \text{ kN/m}^3$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\gamma_{cls} [l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d)]}{\gamma l^2} = \\ &\frac{24000 \times [2.0^2 \times 3.2 - (2.0 - 2 \times 0.15)^2 \times (3.2 - 2 \times 0.15)]}{10150 \times 2.0^2} = 2.61 \text{ m} \end{aligned}$$

$$z_M - z_C = \frac{I_{Gxx}}{V_{carena}} = \frac{\frac{1}{12} l^4}{l^2 h} = \frac{\frac{1}{12} \times 2.0^4}{2.0^2 \times 2.61} = 0.13 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{2d^2 l^2 + [2(l - 2d)d + 2ld](H - 2d) \left(\frac{H - 2d}{2} + 2d \right)}{l^2 H - (l - 2d)^2 (H - 2d)} = \\ &\frac{\left\{ 2 \times 0.15^2 \times 2.0^2 + [2 \times (2.0 - 2 \times 0.15) \times 0.15 + 2 \times 2.0 \times 0.15] \right\} \\ &\quad \times (3.2 - 2 \times 0.15) \times \left(\frac{3.2 - 2 \times 0.15}{2} + 2 \times 0.15 \right)}{2.0^2 \times 3.2 - (2.0 - 2 \times 0.15)^2 (3.2 - 2 \times 0.15)} \\ &= 1.315 \text{ m} \end{aligned}$$

$$z_G - z_C = 1.315 - \frac{2.61}{2} = 0.01 \text{ m}.$$

Quindi, il centro di carena è più basso del baricentro. Tuttavia:

$$z_M - z_C > z_G - z_C \rightarrow 0.13 > 0.01.$$

L'equilibrio è stabile.

Esercizio 3.10

Il molo foraneo di un porto turistico in un lago (Figura 3.20) è realizzato con cassoni galleggianti di dimensioni $l = 5260$ mm, $b = 3000$ mm, $h_c = 1800$ mm, liberi di scorrere verticalmente su coppie di pali circolari cilindrici verticali, dotati di uno schermo per ridurre la penetrazione ondosa, di altezza $h_s = 3000$ mm. Per garantire la verticalità del cassone, internamente allo stesso è posizionato un contrappeso di peso pari a quello dello schermo. Lo scorrimento avviene attraverso dei tubi circolari di diametro pari a 1400 mm, prolungati in basso oltre il fondo del cassone. I cassoni, lo schermo e i tubi sono realizzati in lamiera d'acciaio di spessore $s = 10$ mm. Le dimensioni sono riportate in Figura 3.20.

- Calcolare l'affondamento h dei cassoni.
 - Verificare la stabilità dell'equilibrio per piccole rotazioni attorno ai due assi orizzontali.
 - Calcolare il periodo proprio di oscillazione verticale dei cassoni.
- ◇ Si assuma il peso specifico dell'acciaio $\gamma_{\text{acciaio}} = 77 \text{ kN/m}^3$ e il peso specifico dell'acqua dolce $\gamma = 9.80 \text{ kN/m}^3$. Il coefficiente di massa aggiunta è pari a $C_m = 1.7$.

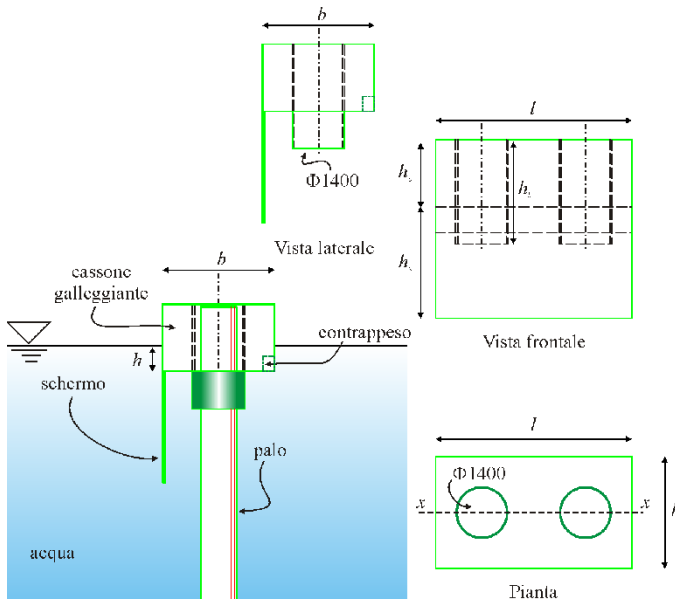


Figura 3.20. Cassone galleggiante libero di scorrere verticalmente

Soluzione

Si consideri lo schema riportato in Figura 3.21.

Per l'equilibrio al galleggiamento (equilibrio alla traslazione verticale) è necessario che la spinta di Archimede sia uguale al peso del cassone:

$$P_{cassone} = \gamma V_{carena}.$$

Il peso del cassone è pari a:

$$P_{cassone} = \gamma_{acciaio} \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + 2 \underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}} \right] + P_{contr}.$$

P_{contr} è il contrappeso, pari al peso dello schermo. Quindi:

$$P_{cassone} = \gamma_{acciaio} \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + 2 \underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{2h_s l s}_{\text{volume schermo + contrappeso}} \right].$$

Il volume di carena è pari a:

$$V_{carena} = \underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) h}_{\text{volume spostato dal parallelepipedo}} + \underbrace{2\pi D (h_t - h_c) s}_{\text{volume dei tubi fuori dal cassone}} + \underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}}.$$

h è l'affondamento.

All'equilibrio, risulta:

$$\gamma \left[\underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) h}_{\text{volume spostato dal parallelepipedo}} + \underbrace{2\pi D (h_t - h_c) s}_{\text{volume dei tubi fuori dal cassone}} + \underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}} \right] = \gamma_{acciaio} \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + 2 \underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{2h_s l s}_{\text{volume schermo + contrappeso}} \right].$$

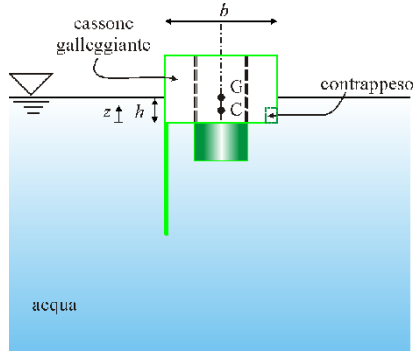


Figura 3.21. Sistema di coordinate per il calcolo del centro di carena, del baricentro e del metacentro

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$P_{cassone} = \gamma_{acciaio} \left[\underbrace{\underbrace{\frac{2h_c l s + 2h_c b s}{\text{volume dei fianchi}} + \underbrace{2 \left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{2h_s l s}_{\text{volume schermo + contrappeso}}}_{\text{volume di acciaio}} \right] =$$

$$77 \times 1.1132 = 85.72 \text{ kN}$$

$$V_{carena} = \underbrace{\left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) h}_{\text{volume spostato dal parallelepipedo}} + \underbrace{2\pi D (h_t - h_c) s}_{\text{volume dei tubi fuori dal cassone}} + \underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}} =$$

$$\left(3 \times 5.26 - 2 \times \frac{\pi \times 1.4^2}{4}\right) \times h + 2 \times \pi \times 1.4 \times (2.80 - 1.80) \times 0.01 + 3 \times$$

$$5.26 \times 0.01 = 12.70 \times h + 0.24576.$$

All'equilibrio, risulta:

$$P_{cassone} = \gamma V_{carena} \rightarrow 85\,720 = 9800 \times (12.70h + 0.24576) \rightarrow h = 0.67 \text{ m.}$$

Il volume di carena è pari a:

$$V_{carena} = \frac{P_{cassone}}{\gamma} = \frac{85\,720}{9800} = 8.747 \text{ m}^3.$$

Per la stabilità dell'equilibrio alle piccole rotazioni intorno ad un asse orizzontale ortogonale al foglio è necessario considerare la quota del baricentro, del centro di carena ed eventualmente del metacentro. Se il centro di carena è più alto del baricentro, l'equilibrio è stabile e non occorre altra verifica. Altrimenti è sufficiente che il metacentro si trovi al di sopra del baricentro, cioè:

$$z_M - z_C > z_G - z_C.$$

La posizione del baricentro si calcola suddividendo il cassone in volumi elementari. Quindi, si eguaglia il momento statico di tutto il cassone con la somma dei momenti statici dei volumi elementari. Il momento statico della porzione parallelepipedica del cassone, rispetto ad un piano orizzontale passante per l'origine del sistema di coordinate fissate, vale:

$$S_{z1} = \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + \underbrace{2 \left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_c s}_{\text{volume dei tubi nella sagoma}} \right] \frac{h_c}{2}.$$

Il momento statico dello schermo è negativo ed è pari a:

$$S_{z2} = - \left(\underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}} \right) \frac{h_s}{2}.$$

Il momento statico della porzione dei tubi fuori sagoma rispetto al cassone è negativo ed è pari a:

$$S_{z3} = - \underbrace{2\pi D (h_t - h_c) s}_{\text{volume dei tubi fuori sagoma}} \frac{(h_t - h_c)}{2}.$$

Trascuriamo il momento statico del contrappeso, assumendo che il contrappeso sia a breve distanza dall'origine del sistema di coordinate scelto. Il momento statico totale è pari al prodotto del volume totale di acciaio (incluso il volume equivalente del contrappeso) per la distanza incognita del baricentro:

$$\begin{aligned}
& \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + \underbrace{2 \left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{2h_s l s}_{\text{volume schermo + contrappeso}} \right] z_G \\
& = S_{z1} + S_{z2} + S_{z3}.
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\begin{aligned}
S_{z1} &= \left[\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + \underbrace{2 \left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_c s}_{\text{volume dei tubi nella sagoma}} \right] \frac{h_c}{2} \\
&= \left[\underbrace{2 \times 1.80 \times 5.26 \times 0.01 + 2 \times 1.80 \times 3 \times 0.01}_{\text{volume dei fianchi}} + \right. \\
&\quad \left. \underbrace{2 \times \left(3 \times 5.26 - 2 \times \frac{\pi \times 1.4^2}{4} \right) \times 0.01}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2 \times \pi \times 1.4 \times 1.8 \times 0.01}_{\text{volume dei tubi}} \right] \times \frac{1.8}{2} \\
&= 0.639 \text{ m}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{z2} &= - \left(\underbrace{h_s l s}_{\text{volume schermo}} \right) \frac{h_s}{2} = -3 \times 5.26 \times 0.01 \times \frac{3}{2} = -0.2367 \text{ m}^4 \\
S_{z3} &= - \underbrace{2\pi D (h_t - h_c) s}_{\text{volume dei tubi fuori sagoma}} \frac{(h_t - h_c)}{2} \\
&= -2 \times \pi \times 1.4 \times (2.8 - 1.8) \times 0.01 \times \frac{(2.8 - 1.8)}{2} = -0.04398 \text{ m}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{S_{z1} + S_{z2} + S_{z3}}{\underbrace{2h_c l s + 2h_c b s}_{\text{volume dei fianchi}} + \underbrace{2 \left(bl - 2 \frac{\pi D^2}{4} \right) s}_{\text{volume lastre orizzontali}} + \underbrace{2\pi D h_t s}_{\text{volume dei tubi}} + \underbrace{2h_s l s}_{\text{volume schermo + contrappeso}}} \\
&= \frac{0.639 - 0.2367 - 0.04398}{1.1132} = 0.32 \text{ m}.
\end{aligned}$$

Analogamente è possibile calcolare il centro di carena con riferimento ai momenti statici dei volumi d'acqua spostati. S_{z2} e S_{z3} sono invariati. Il momento statico del volume d'acqua spostato dalla sagoma del cassone è pari a:

$$\begin{aligned}
 S_{z4} &= \left[blh - 2 \frac{\pi D^2}{4} h \right] \frac{h}{2} = \underbrace{\left[3 \times 5.26 \times 0.67 - 2 \times \frac{\pi \times 1.4^2}{4} \times 0.67 \right]}_{V_4} \times \frac{0.67}{2} \\
 &= \underbrace{8.509}_{V_4} \times \frac{0.67}{2} = 2.850 \text{ m}^4 \\
 z_C &= \frac{S_{z4} + S_{z2} + S_{z3}}{V_{carena}} = \frac{2.850 - 0.2367 - 0.04398}{8.747} = 0.29 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Come già riportato in precedenza, se il centro di carena fosse più in alto del baricentro, il corpo galleggiante sarebbe stabile per piccole rotazioni, poiché la coppia incipiente associata ad una piccola rotazione tenderebbe ad annullare la rotazione stessa. Poiché il centro di carena è, per il caso in esame, più in basso del baricentro, è necessario verificare la posizione del metacentro.

Nell'ipotesi di piccole rotazioni di rollio (rotazione intorno ad un asse ortogonale al disegno), la distanza tra il centro di carena e il metacentro si calcola come segue:

$$z_M - z_C = \frac{I_{Gxx}}{V_{carena}}.$$

I_{Gxx} è il momento d'inerzia assiale della sezione di galleggiamento rispetto ad un asse parallelo all'asse di rotazione e baricentrico. Nel caso proposto risulta:

$$I_{Gxx} = \frac{1}{12} lb^3 - 2 \frac{\pi D^4}{64}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$I_{Gxx} = \frac{1}{12} lb^3 - 2 \frac{\pi D^4}{64} = \frac{1}{12} \times 5.26 \times 3^3 - 2 \times \frac{\pi \times 1.4^4}{64} = 11.458 \text{ m}^4.$$

Quindi:

$$z_M - z_C = \frac{I_{Gxx}}{V_{carena}} = \frac{11.458}{8.747} = 1.31 \text{ m}.$$

La condizione di stabilità dell'equilibrio alle piccole rotazioni intorno ad un asse orizzontale ortogonale al foglio richiede che:

$$z_M - z_C > z_G - z_C \rightarrow 1.31 > 0.32 - 0.29 \equiv 0.03.$$

L'equilibrio è stabile. La stabilità è garantita in misura anche maggiore per la rotazione intorno ad un asse ortogonale al precedente e contenuto nel piano orizzontale, poiché il momento d'inerzia I_{Gxx} precedentemente calcolato è il più piccolo.

Per il calcolo del periodo proprio di risonanza per oscillazioni verticali, scriviamo l'equazione della dinamica nella quale la forza agente è la spinta di Archimede associata ad uno scostamento verticale z rispetto alla posizione di equilibrio:

$$(m + m_a) \frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma A z = 0.$$

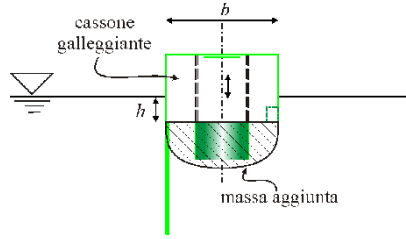


Figura 3.22. Massa aggiunta (in tratteggio) per oscillazioni verticali

m è la massa del corpo galleggiante, m_a è la massa aggiunta (dovuta al fluido circostante coinvolto nel movimento del corpo galleggiante, Figura 3.22), A è l'area della sezione trasversale del volume di carena all'intersezione con la linea di sponda. La massa aggiunta si ottiene moltiplicando la massa d'acqua dislocata dal volume di carena (pari anche alla massa del corpo galleggiante) per il coefficiente di massa aggiunta C_m (determinato sperimentalmente):

$$m_a = C_m \rho V_{carena}.$$

L'equazione differenziale ordinaria del 2° ordine può essere riscritta in forma compatta come segue:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \underbrace{\frac{\gamma A}{m + m_a}}_{\omega^2} z = 0.$$

L'evoluzione libera del sistema ammette una soluzione periodica oscillante del tipo:

$$z(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t.$$

c_1 e c_2 sono le due costanti di integrazione, che dipendono dalle condizioni iniziali. Il periodo di oscillazione è pari a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_a}{\gamma A}}.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$m = \frac{P_{cassone}}{g} = \frac{85\,720}{9.806} = 8742 \text{ kg}$$

$$m_a = C_m \rho V_{carena} = 1.7 \times 1000 \times 8.747 = 14\,870 \text{ kg}$$

$$A = 3 \times 5.26 - 2 \times \frac{\pi \times 1.4^2}{4} = 12.70 \text{ m}^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_a}{\gamma A}} = 2 \times \pi \times \sqrt{\frac{8742 + 14\,870}{9800 \times 12.70}} = 2.74 \text{ s}.$$

Bilanci di quantità di moto

Esercizio 4.1

La curva a gomito convergente riportata in Figura 4.1 è contenuta in un piano verticale e devia una corrente idrica di un angolo pari a 135° . I diametri di passaggio dell'acqua in ingresso e in uscita sono D_1 e D_2 . Sono note la portata idrica Q e le pressioni p_1 e p_2 , baricentriche nelle sezioni 1 e 2; sono noti, inoltre, il volume idrico V compreso tra le sezioni 1 e 2 e il peso della curva P .

- Determinare le forze in direzione orizzontale e verticale necessarie per tenere in equilibrio la curva.

◇ Dati numerici:

$$\begin{aligned} D_1 &= (400 + C_u) \text{ mm}, \quad D_2 = (200 + C_u) \text{ mm}, \quad Q = (400 + C_{pu}) \text{ l/s}, \\ p_1 &= (150 + C_u) \text{ kPa}, \quad p_2 = (90 + C_{pu}) \text{ kPa}, \quad V = (0.2 + 0.01 \times C_u) \text{ m}^3, \\ P &= (120 + C_{pu}) \text{ N}. \end{aligned}$$

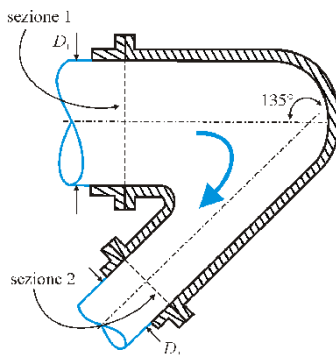


Figura 4.1. Curva con riduzione contenuta in un piano verticale

Soluzione

Per il calcolo della spinta sulla curva, applichiamo il bilancio di quantità di moto al volume di controllo delimitato dalla sezione 1 e 2 e dalle pareti della curva (Figura 4.2):

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0.$$

\mathbf{F} è la spinta esercitata dalla curva sul volume di controllo.

L'equazione di bilancio della quantità di moto in direzione x si scrive come segue:

$$F_x = -p_1 \frac{\pi D_1^2}{4} - \rho Q V_1 - p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \theta - \rho Q V_2 \cos \theta.$$

F_x rappresenta la componente secondo x dell'azione esercitata dalla curva sul volume di controllo.

L'equazione di bilancio della quantità di moto in direzione y si scrive come segue:

$$F_y = -p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \theta - \rho Q V_2 \sin \theta + \gamma V.$$

F_y rappresenta la componente secondo y dell'azione esercitata dalla curva sul volume di controllo. La forza verticale totale da esercitare sulla curva sarà pari alla somma di F_y e del peso della curva, $F_{toty} = F_y + P$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$D_1 = 400$ mm, $D_2 = 200$ mm, $Q = 400$ l/s, $p_1 = 150$ kPa, $p_2 = 90$ kPa, $V = 0.2$ m³, $P = 120$ N, $\theta = 45^\circ$, $\rho = 1000$ kg/m³

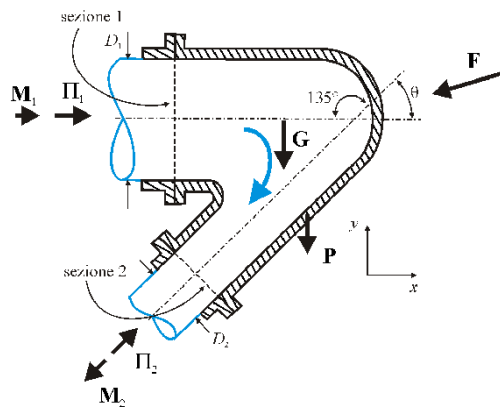


Figura 4.2. Schema di calcolo delle azioni

$$\begin{aligned}
F_x &= -p_1 \Omega_1 - \rho \frac{Q^2}{\Omega_1} - p_2 \Omega_2 \cos \theta - \rho \frac{Q^2}{\Omega_2} \cos \theta = \\
&= -150\,000 \times \frac{\pi \times 0.4^2}{4} - 1000 \times \frac{0.4^2}{\frac{\pi \times 0.4^2}{4}} - 90\,000 \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4} \times \cos 45^\circ - \\
&= 1000 \times \frac{0.4^2}{\frac{\pi \times 0.2^2}{4}} \times \cos 45^\circ = -25.7 \text{ kN}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_y &= -p_2 \Omega_2 \sin \theta - \rho \frac{Q^2}{\Omega_2} \sin \theta + \gamma V_1 = \\
&= -90\,000 \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4} \times \sin 45^\circ - 1000 \times \frac{0.4^2}{\frac{\pi \times 0.2^2}{4}} \times \sin 45^\circ + 9806 \times 0.2 = \\
&= -3.64 \text{ kN}
\end{aligned}$$

$$F_{toty} = F_y - P = -3639 + 120 = -3.52 \text{ kN}.$$

Esercizio 4.2

La pattinatrice in Figura 4.3, di massa $M = (60 + C_u)$ kg, regge una lancia di diametro $D = 20$ mm e di massa trascurabile. La velocità di efflusso dell'acqua è pari a 10 m/s. A partire dalla quiete calcolare:

- la velocità della pattinatrice dopo 5 s;
- la distanza percorsa dalla pattinatrice nello stesso intervallo di tempo.

Soluzione

Scelto un volume di controllo solidale alla pattinatrice (in generale il riferimento scelto è non inerziale), il bilancio di quantità di moto ad esso riferito permette di calcolare una forza agente sulla pattinatrice pari al flusso di quantità di moto in uscita:

$$F = \rho V^2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

Tale forza è parallela e in verso opposto alla velocità di efflusso \mathbf{V} . La velocità deve essere calcolata sempre rispetto al volume di controllo. Se l'alimentazione

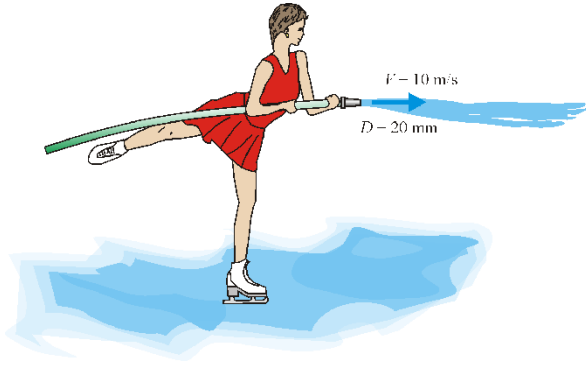


Figura 4.3. Pattinatrice con lancia

della lancia non è influenzata dal moto della pattinatrice, la forza F è costante. Pertanto, l'equazione della dinamica per la pattinatrice può essere scritta come segue:

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = F.$$

s è la coordinata spaziale. Per doppia integrazione, risulta:

$$s = \frac{F}{M} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2.$$

Le condizioni iniziali di velocità nulla e posizione nell'origine del sistema di coordinate s , rendono nulle le due costanti di integrazione c_1 e c_2 . Quindi:

$$s = \frac{F}{M} \frac{t^2}{2}$$

$$U = \frac{ds}{dt} = \frac{F}{M} t.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$M = 60 \text{ kg}$, $D = 20 \text{ mm}$, $V = 10 \text{ m/s}$

$$F = \rho V^2 \frac{\pi D^2}{4} = 1000 \times 10^2 \times \frac{\pi \times 0.02^2}{4} = 31.4 \text{ N}$$

$$s = \frac{F}{M} \frac{t^2}{2} = \frac{31.4}{60} \times \frac{5^2}{2} = 6.54 \text{ m}$$

$$U = \frac{F}{M} t = \frac{31.4}{60} \times 5 = 2.62 \text{ m/s}.$$

Esercizio 4.3

Il getto d'acqua in Figura 4.4, di diametro $D = (100 + C_{pu} \times 10)$ mm e velocità $V = (30 + C_u)$ m/s, investe assialmente una superficie conica. Calcolare:

- lo spessore della lama d'acqua a distanza $R = 200$ mm dall'asse del cono;
- la forza che è necessario applicare al cono per muoverlo verso sinistra con velocità costante $V_c = 15$ m/s.

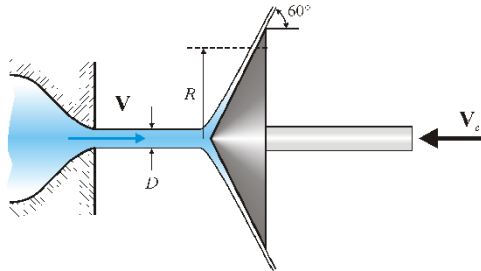


Figura 4.4. Getto circolare cilindrico che investe una superficie conica mobile

Soluzione

Consideriamo la traiettoria in Figura 4.5, tra la sezione 1 e la sezione 2.

Trascurando le dissipazioni, dal Teorema di Bernoulli risulta:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}.$$

In Figura 4.5 è riportato in tratteggio il diagramma qualitativo della distribuzione di pressione. La pressione è massima in asse ed è nulla nella sezione di distacco della

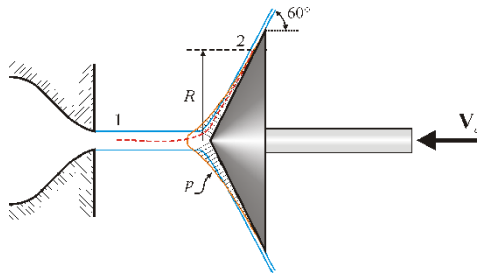


Figura 4.5. Traiettoria per l'applicazione del Teorema di Bernoulli e diagramma della pressione

corrente dal cono. Nelle sezioni della corrente a contatto con la superficie conica, la distribuzione di pressione lungo la normale alla parete è quasi idrostatica (a rigore, le traiettorie sono convergenti verso la parete e dunque la distribuzione non è idrostatica) e decresce dall'asse verso il bordo d'uscita, dove assume valore pari alla pressione atmosferica. Poiché il calcolo di p_2 richiede l'integrazione delle equazioni del moto, per il calcolo della velocità V_2 non risulta vantaggiosa l'applicazione del Teorema di Bernoulli. Tuttavia, se trascuriamo la variazione di quota geodetica e se la sezione 2 è esterna al cono, dove la corrente è nuovamente in aria lungo tutto il suo contorno (la pressione relativa p_2 è nulla), risulta che la velocità della corrente è pari alla velocità del getto incidente. Ciò vale in via approssimata anche a distanza dall'asse sufficientemente grande.

A distanza R dall'asse, la sezione della corrente è pari a:

$$\Omega = 2\pi \frac{R}{\cos 30^\circ} \delta.$$

δ è lo spessore della corrente. Applicando l'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\pi D^2}{4} V = 2\pi \frac{R}{\cos 30^\circ} \delta V \rightarrow \delta = \frac{D^2}{8R} \cos 30^\circ.$$

Per il calcolo della forza necessaria a muovere il cono a velocità costante, scegliamo il volume di controllo mobile solidale al cono in Figura 4.6. Nel bilancio di quantità di moto, tutti i flussi devono essere calcolati con riferimento alla superficie che delimita il volume di controllo, con grandezze trasformate nel sistema di riferimento inerziale mobile e solidale al volume di controllo. La velocità del fluido in ingresso, nel riferimento inerziale mobile, è pari a $\mathbf{V} + \mathbf{V}_c$. La pressione è pari alla pressione atmosferica (si dimostra che la pressione all'interno di una corrente di un liquido in aria, deve essere uniforme e pari alla pressione sul contorno). La velocità del

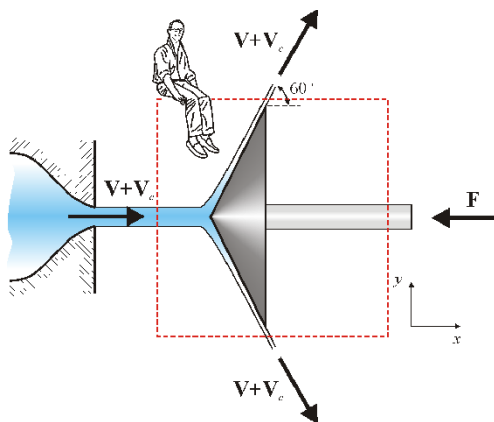


Figura 4.6. Volume di controllo mobile per il calcolo delle spinte

fluido in uscita è ancora pari a $\mathbf{V} + \mathbf{V}_c$. Quindi, risulta:

$$\underbrace{\rho (V + V_c)^2 \frac{\pi D^2}{4}}_{\text{flusso di q.d.m.in ingresso, direzione } x} - \underbrace{\rho (V + V_c)^2 \Omega_u \cos 60^\circ}_{\text{flusso di q.d.m.in uscita, direzione } x} + F_x = 0.$$

Ω_u è l'area della sezione trasversale della corrente in uscita dal volume di controllo.

Per la conservazione della massa, risulta:

$$(V + V_c) \frac{\pi D^2}{4} = (V + V_c) \Omega_u$$

e, quindi:

$$F_x = -\rho (V + V_c)^2 \frac{\pi D^2}{4} (1 - \cos 60^\circ).$$

Trascurando la forza peso, ogni altra componente della forza è nulla per simmetria.

La forza applicata sul cono deve essere diretta verso sinistra.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$D = 100 \text{ mm}, V = 30 \text{ m/s}, R = 200 \text{ mm}, V_c = 15 \text{ m/s}$$

$$\delta = \frac{D^2}{8R} \cos 30^\circ = \frac{0.1^2}{8 \times 0.2} \times \cos 30^\circ = 5.4 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho (V + V_c)^2 \frac{\pi D^2}{4} (1 - \cos 60^\circ) = \\ &= -1000 \times (30 + 15)^2 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times (1 - \cos 60^\circ) = -7950 \text{ N}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.4

Il serbatoio del carburante di un razzo (Figura 4.7) è cilindrico, di diametro $D = 3 \text{ m}$, è coassiale al razzo ed è pressurizzato a pressione assoluta $p = (3 + C_{pu}/10) \text{ bar}$. Il peso specifico del carburante fluido è pari a $\gamma = 0.8 \times \gamma_{acqua}$ e il tirante iniziale è pari a $h = (3 + C_u/10) \text{ m}$. Calcolare:

- la forza sul fondo del serbatoio al decollo, se il decollo avviene con accelerazione $a = 10 \text{ m/s}^2$ e da una rampa di lancio al livello del mare;
- la stessa forza quando il 40% del carburante è bruciato e la massa totale del razzo è il 70% della massa iniziale, nell'ipotesi che la spinta del motore sia la stessa della spinta al decollo, che la pressurizzazione del serbatoio sia invariata, che l'accelerazione di gravità sia pari al 50% dell'accelerazione di gravità standard e la pressione atmosferica sia ridotta al 20% della pressione atmosferica al livello del mare.

◇ Si assuma $\gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3$. Si assuma $p_{atm} = 1 \text{ bar}$ al livello del mare.

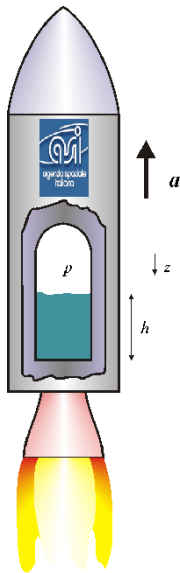


Figura 4.7. Razzo con serbatoio circolare cilindrico

Soluzione

Integrando l'equazione indefinita della statica nel riferimento non inerziale solidale al razzo:

$$\rho(g + a) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

e imponendo la condizione che la pressione assoluta all'interfaccia libera del carburante sia uguale a p , la pressione assoluta al fondo del serbatoio è pari a:

$$p_{fint} = p + 0.8\rho_{acqua}(g + a)h.$$

Dall'esterno agisce la pressione atmosferica. La forza agente sul fondo, al decollo, è pari a:

$$F = (p_{fint} - p_{atm}) \frac{\pi D^2}{4} = [p + 0.8\rho_{acqua}(g + a)h - p_{atm}] \frac{\pi D^2}{4}.$$

Se dopo un certo intervallo di tempo in volo, durante il quale la massa passa da m a $m' = 0.7m$ (a causa del consumo di combustibile e di comburente), la spinta del vettore è invariata, si avrà un aumento dell'accelerazione, che assumerà un valore pari a:

$$a' = a \frac{m}{m'} = \frac{a}{0.7}.$$

Inoltre, una riduzione del 40% del combustibile determina una riduzione di tirante nel serbatoio. Il nuovo tirante sarà pari a:

$$h' = 0.6h.$$

Pertanto, considerando anche la riduzione dell'accelerazione di gravità, il valore della nuova forza sul fondo sarà pari a:

$$\begin{aligned} F' &= (p'_{fint} - 0.2p_{atm}) \frac{\pi D^2}{4} = [p + 0.8\rho_{acqua} (0.5g + a') h' - 0.2p_{atm}] \frac{\pi D^2}{4} \\ &= \left[p + 0.8\rho_{acqua} \left(0.5g + \frac{a}{0.7} \right) 0.6h - 0.2p_{atm} \right] \frac{\pi D^2}{4}. \end{aligned}$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$D = 3$ m, $p = 3$ bar, $\gamma_{acqua} = 9800$ N/m³, $\gamma = 0.8 \times \gamma_{acqua} = 7840$ N/m³,
 $\rho = 800$ kg/m³, $h = 3$ m, $a = 10$ m/s²

$$\begin{aligned} F &= [p + 0.8\rho_{acqua} (g + a) h - p_{atm}] \frac{\pi D^2}{4} \\ &= [3 \times 10^5 + 0.8 \times 1000 \times (9.806 + 10) \times 3 - 1 \times 10^5] \times \frac{\pi \times 3^2}{4} = 1750 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F' &= \left[p + 0.8\rho_{acqua} \left(0.5g + \frac{a}{0.7} \right) 0.6h - 0.2p_{atm} \right] \frac{\pi D^2}{4} \\ &= \left[3 \times 10^5 + 0.8 \times 1000 \times \left(0.5 \times 9.806 + \frac{10}{0.7} \right) \times 0.6 \times 3 - 0.2 \times 10^5 \right] \times \frac{\pi \times 3^2}{4} \\ &= 2174 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.5

Un elicottero di massa $M = (10\,000 + C_u \times 100)$ kg ha le pale di diametro $D = (14 + C_{pu}/10)$ m che ruotano a 400 rpm. Calcolare:

- la portata volumetrica d'aria necessaria per il sollevamento al livello medio del mare;
 - la potenza ceduta all'aria;
 - la velocità di rotazione delle pale minima necessaria se l'elicottero è a quota 3000 m, con densità dell'aria pari a $\rho_{aria} = 0.79$ kg/m³;
 - gli stessi valori se l'elicottero trasla verticalmente con una velocità $U = 20$ m/s;
 - gli stessi valori se l'elicottero ha agganciato un carico di massa $M_1 = 12\,000$ kg;
- ◇ Al livello medio mare si assuma $\rho_{aria} = 1.18$ kg/m³. Si assuma la portata volumetrica variabile linearmente con la velocità di rotazione delle pale.

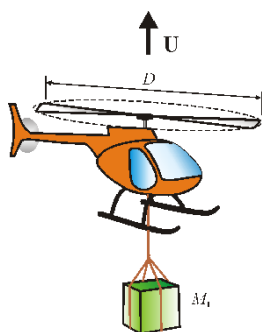


Figura 4.8. Elicottero per il trasporto di carichi

Soluzione

Sperimentalmente, le linee di corrente del flusso generato dalle pale convergono dalla regione a monte e si dispongono in maniera tale da definire il tubo di flusso riportato in Figura 4.9.

La pressione varia poco lungo la singola traiettoria (coincidente con la linea di corrente in regime stazionario) eccetto che a cavallo del rotore, dove si localizza un gradiente significativo. La velocità della corrente è asintoticamente nulla a monte, aumenta progressivamente attraversando l'elica, raggiunge un valore uniforme V_{out} a valle. Scegliamo un volume di controllo con superficie laterale esterna al tubo di flusso e con sezioni di ingresso e di uscita dove le traiettorie sono rettilinee e parallele.

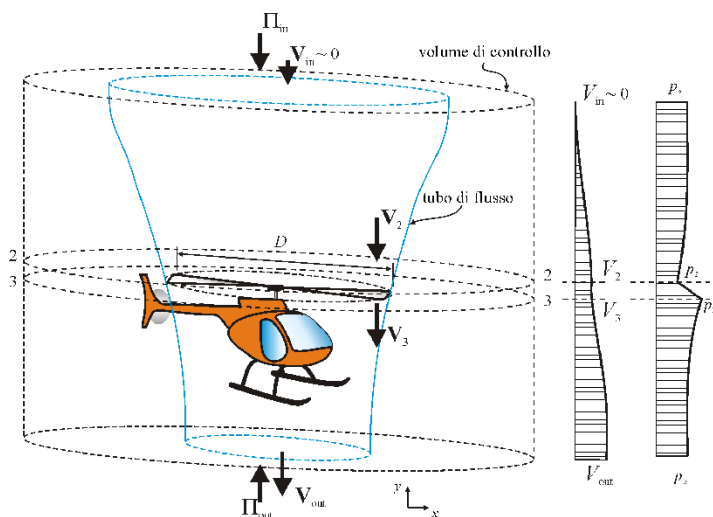


Figura 4.9. Schema e volume di controllo per il calcolo delle spinte

Applicando il Teorema di Bernoulli per una linea di corrente tra la sezione asintotica di monte e la sezione 2, risulta:

$$p_a + \rho_{aria} \frac{V_{in}^2}{2} = p_2 + \rho_{aria} \frac{V_2^2}{2}.$$

La variazione di quota geodetica fornisce un contributo trascurabile. Lo stesso Teorema per una linea di corrente tra la sezione 3 e la sezione di uscita a valle, porta a scrivere la seguente equazione:

$$p_3 + \rho_{aria} \frac{V_3^2}{2} = p_a + \rho_{aria} \frac{V_{out}^2}{2}.$$

Poiché $V_2 = V_3$ per continuità, sottraendo membro a membro le due equazioni risulta anche:

$$p_3 - p_2 = \rho_{aria} \frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2}.$$

La spinta di trazione si ottiene moltiplicando la differenza di pressione a cavallo dell'elica per l'area della superficie del cerchio descritto dall'elica:

$$F = \frac{\pi D^2}{4} (p_3 - p_2) = \frac{\pi D^2}{4} \rho_{aria} \frac{V_{out}^2 - V_{in}^2}{2}.$$

$\pi D^2/4 = \Omega$ è l'area della superficie descritta dalla pala in rotazione.

La spinta di trazione deve anche soddisfare il bilancio di quantità di moto:

$$\cancel{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{F} = -\mathbf{\Pi} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2.$$

\mathbf{F} è l'azione esercitata dal fluido nel volume di controllo sull'elicottero. Il peso dell'aria è trascurabile. Le uniche forze di superficie sono applicate sulla pala. Sviluppando i contributi, risulta:

$$F = \rho_{aria} Q_1 (V_{out} - V_{in}) = \rho_{aria} \frac{\pi D^2}{4} V_2 (V_{out} - V_{in}).$$

Eguagliando le due espressioni della spinta (ottenute applicando sia il Teorema di Bernoulli lungo una traiettoria che il bilancio di quantità di moto in forma integrale), si calcola:

$$V_2 = V_3 = \frac{V_{out} + V_{in}}{2}.$$

Nel caso di elicottero in quiete, la velocità in ingresso è nulla. Pertanto:

$$V_2 = V_3 = \frac{V_{out}}{2}$$

$$F = \frac{\pi D^2}{4} \rho_{aria} \frac{V_{out}^2}{2} = \frac{\pi D^2}{4} \rho_{aria} V_2 V_{out} = 2 \rho_{aria} \frac{Q_1^2}{\Omega}$$

e, quindi:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi D^2}{4}}{2\rho_{aria}}} Mg.$$

La potenza necessaria è pari a:

$$P_1 = \gamma_{aria} Q_1 H = \gamma_{aria} Q_1 \left(\cancel{z} + \frac{p}{\gamma_{aria}} + \frac{V_{out}^2}{2g} \right) = \rho_{aria} Q_1 2V_2^2 = 2\rho_{aria} \frac{Q_1^3}{\Omega^2}.$$

Se l'elicottero trasla verticalmente con velocità uniforme U , scelto un volume di controllo solidale con l'elicottero in movimento, possiamo utilizzare tutte le formule precedenti imponendo $V_{in} = U$.

$$V_2 = V_3 = \frac{V_{out} + U}{2} \rightarrow V_{out} = 2V_2 - U$$

$$\begin{aligned} F &= \rho_{aria} Q_2 (V_{out} - V_{in}) = \rho_{aria} \Omega V_2 (V_{out} - U) = \rho_{aria} \Omega V_2 (2V_2 - 2U) \\ &= 2\rho_{aria} Q_2 \left(\frac{Q_2}{\Omega} - U \right) \end{aligned}$$

e quindi, risolvendo l'equazione di 2° grado, risulta:

$$Q_2 = \frac{U\Omega}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{U^2 \Omega^2 + \frac{2Mg\Omega}{\rho_{aria}}}.$$

La potenza è pari a:

$$\begin{aligned} P_2 &= \gamma_{aria} Q_2 \Delta H = \gamma_{aria} Q_2 \left(\cancel{z} + \frac{p_a}{\gamma_{aria}} + \frac{V_{out}^2}{2g} - \cancel{z} - \frac{p_a}{\gamma_{aria}} - \frac{U^2}{2g} \right) \\ &= \rho_{aria} Q_2 \frac{1}{2} (V_{out}^2 - U^2) = \rho_{aria} Q_2 2V_2 (V_2 - U) = 2\rho_{aria} \frac{Q_2^2}{\Omega} \left(\frac{Q_2}{\Omega} - U \right). \end{aligned}$$

Se cambia la densità di massa dell'aria, la nuova portata volumetrica sarà pari a:

$$Q'_1 = \sqrt{\frac{\frac{\pi D^2}{4}}{2\rho'_{aria}}} Mg \rightarrow \frac{Q'_1}{Q_1} = \sqrt{\frac{\rho_{aria}}{\rho'_{aria}}}.$$

Per calcolare la velocità di rotazione delle pale, si consideri che la portata volumetrica varia linearmente con la velocità di rotazione. Pertanto:

$$\frac{n'_1}{n_1} = \sqrt{\frac{\rho_{aria}}{\rho'_{aria}}}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$M = 10\,000$ kg, $D = 14$ m, $n_1 = 400$ rpm

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 14^2}{4} = 153.93 \text{ m}^2.$$

Se $U = 0$:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{\pi D^2}{4} Mg} = \sqrt{\frac{\pi \times 14^2}{2 \times 1.18} \times 10\,000 \times 9.806} = 2529 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_1 = 2\rho_{aria} \frac{Q_1^3}{\Omega^2} = 2 \times 1.18 \times \frac{2529^3}{153.93^2} = 1.61 \text{ MW}$$

$$\frac{n'_1}{n_1} = \sqrt{\frac{\rho_{aria}}{\rho'_{aria}}} = \sqrt{\frac{1.18}{0.79}} = 1.22 \rightarrow n'_1 = 489 \text{ rpm}.$$

Se $U = 20$ m/s:

$$Q_2 = \frac{U\Omega}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{U^2\Omega^2 + \frac{2Mg\Omega}{\rho_{aria}}} = \frac{20 \times 153.93}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{20^2 \times 153.93^2 + \frac{2 \times 10\,000 \times 9.806 \times 153.93}{1.18}} = 4500 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_2 = 2\rho_{aria} \frac{Q_2^2}{\Omega} \left(\frac{Q_2}{\Omega} - U \right) = 2 \times 1.18 \times \frac{4500^2}{153.93} \times \left(\frac{4500}{153.93} - 20 \right) = 2.87 \text{ MW}.$$

Il caso di presenza di carico utile, oltre al peso proprio dell'elicottero, è di immediata soluzione.

Esercizio 4.6

Il sistema in Figura 4.10 è una turbina di un elicottero di massa totale $M = (1500 + 20 \times C_{pu})$ kg. La sezione d'ingresso è circolare di diametro $D = (3 + C_u/10)$ m, la sezione d'uscita è una corona circolare con diametro interno $d = (2.7 + C_u/10)$ m e diametro esterno D . Assumendo nella sezione di ingresso e in quella di uscita una distribuzione di pressione uniforme e pari a quella atmosferica, con riferimento alle condizioni di stacco da terra, calcolare:

- la velocità dell'aria in ingresso e in uscita;
- la potenza ceduta all'aria dalla turbina.

◇ Si assuma l'aria in moto incompressibile con $\rho_{aria} = 1.2$ kg/m³.

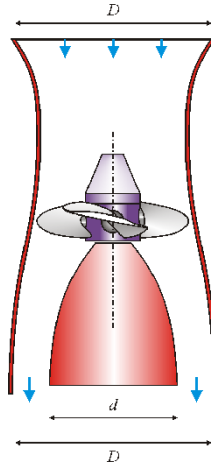


Figura 4.10. Turbina di elicottero

Soluzione

Scelto il volume di controllo in Figura 4.11, proiettiamo l'equazione di bilancio della quantità di moto lungo y :

$$\cancel{G_y} + \Pi_y + \cancel{I_y} + M_{1y} - M_{2y} = 0.$$

Le forze di superficie si riducono all'azione esercitata dall'elica e dal carter della turbina sul volume di controllo poiché, per ipotesi, la pressione nella sezione di ingresso e nella sezione di uscita è pari alla pressione atmosferica:

$$\Pi_y = -F.$$

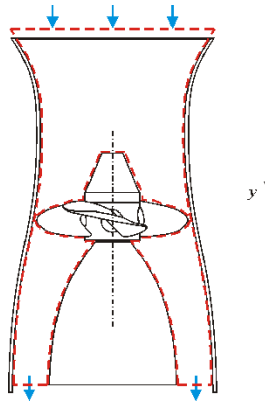


Figura 4.11. Volume di controllo

In particolare, la pressione che agisce sulla parte inferiore dell'elica è maggiore della pressione che agisce sulla parte superiore. Sostituendo, risulta:

$$-F + \rho_{aria} \frac{Q^2}{\pi D^2} - \rho_{aria} \frac{Q^2}{\pi (D^2 - d^2)} = 0.$$

Quindi, l'azione del fluido nel volume di controllo sul sistema elica-carter (cioè la spinta della turbina) è pari a:

$$F = -\frac{4\rho_{aria}Q^2}{\pi} \left[\frac{1}{(D^2 - d^2)} - \frac{1}{D^2} \right]$$

ed è diretta verso l'alto. Allo stacco, la spinta della turbina deve essere uguale al peso dell'elicottero:

$$F + Mg = 0.$$

Quindi, la portata volumetrica minima necessaria allo stacco è pari a:

$$Q = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{4\rho_{aria}}{\pi} \left[\frac{1}{(D^2 - d^2)} - \frac{1}{D^2} \right]}}.$$

La potenza ceduta all'aria dalla turbina sarà pari a:

$$P = \gamma_{aria} Q \Delta H = \rho_{aria} Q \left(\frac{V_u^2}{2} - \frac{V_i^2}{2} \right)$$

dato che il termine di pressione è nullo e il termine gravitazionale è trascurabile. V_i e V_u sono, rispettivamente, la velocità media dell'aria nella sezione di ingresso e di uscita calcolate nel riferimento del volume di controllo. Sulla base dell'equazione di conservazione della massa si calcolano le velocità medie in ingresso e in uscita:

$$V_i = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$V_u = \frac{4Q}{\pi (D^2 - d^2)}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$M = 1500 \text{ kg}, D = 3 \text{ m}, d = 2.7 \text{ m}, \rho_{aria} = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$Q = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{4\rho_{aria}}{\pi} \left[\frac{1}{(D^2 - d^2)} - \frac{1}{D^2} \right]}} = \sqrt{\frac{1500 \times 9.806}{\frac{4 \times 1.2}{\pi} \times \left[\frac{1}{(3^2 - 2.7^2)} - \frac{1}{3^2} \right]}} = 142.6 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_i = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 142.6}{\pi \times 3^2} = 20.2 \text{ m/s}$$

$$V_u = \frac{4Q}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \times 142.6}{\pi \times (3^2 - 2.7^2)} = 106.2 \text{ m/s}$$

$$P = \rho_{aria} Q \left(\frac{V_u^2}{2} - \frac{V_i^2}{2} \right) = 1.2 \times 142.6 \times \left(\frac{106.2^2}{2} - \frac{20.2^2}{2} \right) = 930 \text{ kW}.$$

Esercizio 4.7

Dell'acqua fluisce nel sistema di condotte in Figura 4.12, uscendo in atmosfera dalla condotta 2 e 3. Determinare:

- la velocità di uscita V_2 ;
- la forza esercitata sulla flangia.

◇ Si trascurino il peso e le resistenze al moto. Dati numerici:

$$V_1 = (6 + C_u/10) \text{ m/s}, V_3 = (9 + C_u/10) \text{ m/s}, D_1 = D_2 = (300 + C_{pu}) \text{ mm}, \\ D_3 = (200 + C_u) \text{ mm}, \alpha = (40 + C_u)^\circ, p_m = (0.7 + C_{pu} \times 0.1) \text{ bar}.$$

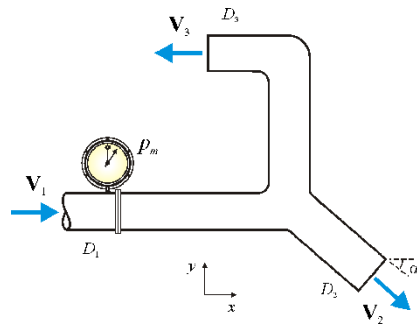


Figura 4.12. Sistema di condotte con efflusso libero in aria

Soluzione

La velocità V_2 si calcola sulla base dell'equazione di conservazione della massa per fluidi in moto incompressibile:

$$V_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} + V_3 \frac{\pi D_3^2}{4} \rightarrow V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} - V_3 \frac{D_3^2}{D_2^2}.$$

La forza lungo gli assi x e y si calcola applicando il bilancio di quantità di moto:

$$\cancel{G_x} + \Pi_{0x} + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + \cancel{J_x} + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

$$\cancel{G_y} + \Pi_{0y} + \Pi_{1y} + \Pi_{2y} + \cancel{J_y} + M_{1y} - M_{2y} = 0$$

cioè:

$$\Pi_{0x} + (\rho V_1^2 + p_m) \frac{\pi D_1^2}{4} + \rho V_3^2 \frac{\pi D_3^2}{4} - \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \alpha = 0$$

$$\Pi_{0y} + \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \alpha = 0.$$

Π_{0x} e Π_{0y} sono le due componenti della forza esercitata dalla flangia, tramite i tronchi di condotta ad essa vincolati, sul volume di controllo; p_m è la pressione relativa indicata dal manometro. Per il principio di azione e reazione, le azioni sulla flangia sono uguali e contrarie:

$$S_x = -\Pi_{0x} = (\rho V_1^2 + p_m) \frac{\pi D_1^2}{4} + \rho V_3^2 \frac{\pi D_3^2}{4} - \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \alpha$$

$$S_y = -\Pi_{0y} = \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \alpha.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$V_1 = 6$ m/s, $V_3 = 9$ m/s, $D_1 = D_2 = 300$ mm, $D_3 = 200$ mm, $\alpha = 40^\circ$,
 $p_m = 0.7$ bar

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} - V_3 \frac{D_3^2}{D_2^2} = 6 - 9 \times \frac{200^2}{300^2} = 2 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} S_x &= (\rho V_1^2 + p_m) \frac{\pi D_1^2}{4} + \rho V_3^2 \frac{\pi D_3^2}{4} - \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \cos \alpha \\ &= (1000 \times 6^2 + 0.7 \times 10^5) \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} + 1000 \times 9^2 \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4} \\ &\quad - 1000 \times 2^2 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \cos 40^\circ = 9821 \text{ N} \\ S_y &= \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sin \alpha = 1000 \times 2^2 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times \sin 40^\circ = 182 \text{ N}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.8

Il caccia in Figura 4.13 si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $V = (100 + 10 \times C_u)$ m/s. Il controllo di direzione è coadiuvato da un dispositivo di variazione della direzione del getto del reattore. La portata in massa in ingresso è pari alla portata in massa in uscita ed è uguale a $Q_m = (230 + 10 \times C_{pu})$ Kg/s.

La velocità $V_{out} = (300 + 10 \times C_u)$ m/s è misurata rispetto al velivolo. Calcolare:

- la spinta del motore se il getto è coassiale alla carlinga;
- la spinta del motore se il getto è inclinato di $\theta = (4 + C_{pu})^\circ$ nel piano verticale rispetto all'asse della carlinga;
- la coppia di beccheggio (rotazione intorno all'asse longitudinale delle ali) per i due casi, calcolata rispetto all'asse orizzontale di traccia C_g .

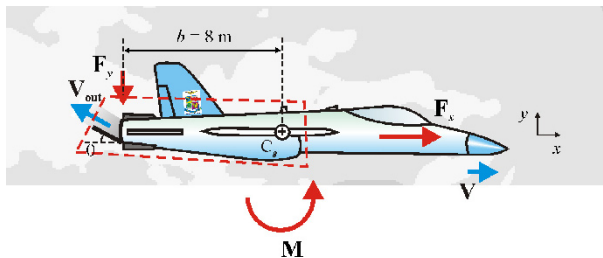


Figura 4.13. Caccia in volo. Volume di controllo

Soluzione

Scelto il volume di controllo tratteggiato in Figura 4.13, se il moto è rettilineo uniforme il sistema di riferimento solidale al volume di controllo è inerziale. Scegliamo un sistema di coordinate con l'asse x coassiale alla carlinga e l'asse y positivo verso l'alto. Nel riferimento mobile il flusso in ingresso ha velocità pari a $-V$. Applicando il bilancio di quantità di moto al volume di controllo, le forze agenti sulla carlinga sono uguali ed opposte alle forze esercitate dalla carlinga (tramite il propulsore) sul volume di controllo:

$$F_x = -\Pi_{0x} = M_{1x} - M_{2x} = -Q_m (V - V_{out} \cos \theta)$$

$$F_y = -\Pi_{0y} = M_{1y} - M_{2y} = -Q_m V_{out} \sin \theta.$$

In particolare, la componente F_y è dovuta al deflettore e si intende ivi applicata. La coppia di beccheggio è pari a:

$$|\mathbf{M}| = F_y b.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$:

$$Q_m = 230 \text{ Kg/s}; V = 100 \text{ m/s}, V_{\text{out}} = 300 \text{ m/s}, \theta = 4^\circ$$

se il getto è coassiale alla carlinga, risulta:

$$\begin{aligned} F_x &= Q_m (V_{\text{out}} - V) = 230 \times (300 - 100) = 46\,000 \text{ N} \\ F_y &= 0 \end{aligned}$$

e la coppia di beccheggio è nulla.

Se il getto in uscita è inclinato di 4° risulta:

$$\begin{aligned} F_x &= Q_m (V_{\text{out}} \cos \theta - V) = 230 \times (300 \times \cos 4^\circ - 100) = 45\,832 \text{ N} \\ F_y &= -Q_m V_{\text{out}} \sin \theta = -230 \times 300 \times \sin 4^\circ = -4813 \text{ N}. \end{aligned}$$

La coppia di beccheggio è pari a:

$$|\mathbf{M}| = F_y b = 4813 \times 8 = 38\,506 \text{ Nm}$$

in verso antiorario. $b = 8 \text{ m}$ è il braccio rispetto a C_g .

Tale coppia deve intendersi come coppia incipiente: appena viene applicata, determina una rotazione del velivolo corrispondente ad un'impennata.

Esercizio 4.9

Una draga e una chiatta sono vincolate da una catena, come riportato in Figura 4.14. La draga aspira con una condotta verticale dal fondo e scarica nella chiatta una miscela di acqua e fango di densità relativa all'acqua pari a 1.9. La velocità di efflusso, orizzontale, è pari a $V = (5 + C_u/10) \text{ m/s}$ e il diametro dell'ugello è pari a $D = (30 + C_{pu}) \text{ cm}$.

- Calcolare la forza di trazione che sollecita la catena.

Soluzione

Consideriamo il volume di controllo in Figura 4.15. Applicando il bilancio di quantità di moto, la componente orizzontale del flusso di quantità di moto in ingresso, pari a $M_{1x} = \rho QV$, tende a spingere la chiatta verso destra ed è contrastata dalla forza di trazione nella catena. La componente verticale dipende dalla velocità verticale raggiunta dalla corrente del getto a causa della gravità, tende ad aumentare l'affondamento della chiatta ed è bilanciata dalla maggiore spinta di Archimede.

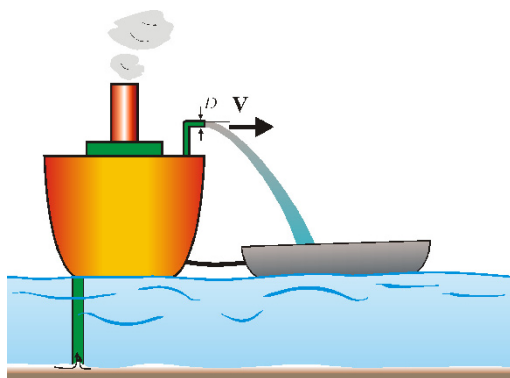


Figura 4.14. Draga che scarica il materiale in una chiatta

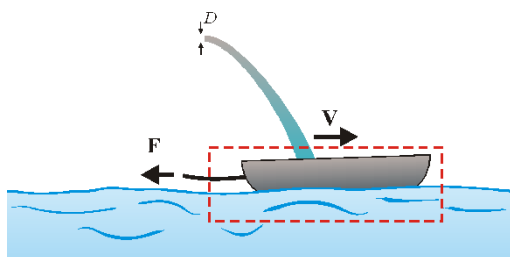


Figura 4.15. Volume di controllo per il calcolo delle azioni sulla chiatta

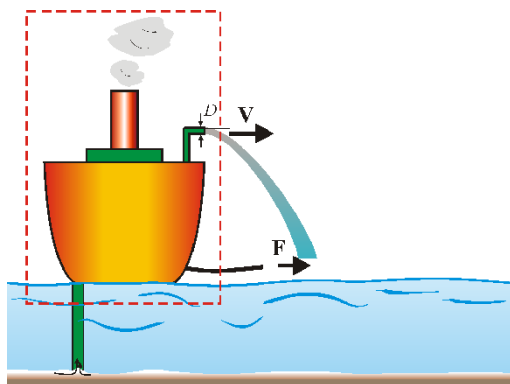


Figura 4.16. Volume di controllo per il calcolo delle azioni sulla draga

Nel bilancio di quantità di moto applicato alla draga (Figura 4.16), il flusso di quantità di moto in ingresso ha componente orizzontale nulla ed è presente il solo flusso di quantità di moto uscente pari a $M_{2x} = \rho QV$ contrastato dalla forza di trazione della catena. Applicando il bilancio di quantità di moto al sistema draga-

chiatta, risulta che i flussi di quantità di moto uscente ed entrante in direzione orizzontale sono nulli e il sistema rimane in quiete. Pertanto, la catena è in trazione con una forza pari a $F = \rho Q V$ che bilancia sia il flusso di quantità di moto entrante nella chiatta che il flusso di quantità di moto uscente dalla draga, e il sistema draga-catena-chiatta non si muove, dato che tutte le forze sono interne.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta $V = 5 \text{ m/s}$, $D = 30 \text{ cm}$ e

$$F = \rho Q V = 1.9 \times 1000 \times 5 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} \times 5 = 3.35 \text{ kN}.$$

Esercizio 4.10

La pompa nel serbatoio in Figura 4.17 genera un getto d'acqua che incide su un carter e viene deviato di un angolo $\alpha = (120 + C_{pu})^\circ$. La portata è pari a $Q = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ e la velocità del getto in uscita dalla pompa è pari a $V = (2 + C_u/3) \text{ m/s}$. Calcolare:

- la spinta sul carrello inizialmente in quiete se il getto segue la traiettoria A;
- la stessa spinta se il getto segue la traiettoria B.

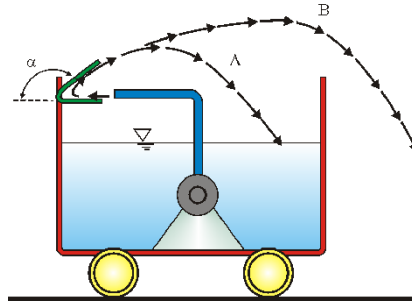


Figura 4.17. Carrello con pompa

Soluzione

Scelto il volume di controllo tratteggiato in Figura 4.18, se il getto segue la traiettoria A la spinta sul carrello si riduce al solo peso del volume di fluido. Infatti, applicando l'equazione di bilancio della quantità di moto, risulta:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}.$$

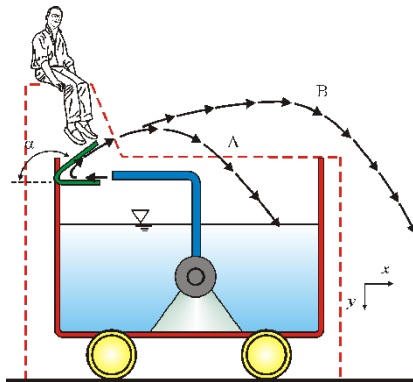


Figura 4.18. Volume di controllo mobile

La proiezione in direzione x è la seguente:

$$\cancel{G_x} + \Pi_x + \cancel{f_x} + M_{1x} - M_{2x} = 0.$$

Si dimostra che $M_{1x} = M_{2x}$ e, quindi, $F_x = -\Pi_x = 0$. F_x è l'azione sul carrello, uguale ed opposta all'azione Π_x esercitata dal carrello sul volume di controllo.

La proiezione in direzione y è la seguente:

$$G_y + \Pi_y + \cancel{f_y} + M_{1y} - M_{2y} = 0.$$

Si dimostra che $M_{1y} = M_{2y}$ e, quindi, $F_y = -\Pi_y = G_y$.

Se il getto segue la traiettoria B, applicando il bilancio di quantità di moto e proiettandolo in direzione x , risulta:

$$\cancel{G_x} + \Pi_x + \cancel{f_x} + \cancel{M_{1x}} - M_{2x} = 0$$

e, quindi, $F_x = -\Pi_x = -M_{2x}$. Il carrello riceve una spinta pari a:

$$F_x = -\rho Q V \cos(\pi - \alpha)$$

che, per $\alpha > \pi/2$, è diretta verso sinistra.

In direzione verticale risulta $F_y = -\Pi_y = G_y - M_{2y}$. Il carrello riceve una spinta in eccesso rispetto al peso del fluido e pari a:

$$F_y - G_y = \rho Q V \sin(\pi - \alpha).$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$\alpha = 120^\circ, Q = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}, V = 2 \text{ m/s}$$

$$F_x = -\rho Q V \cos(\pi - \alpha) = -1000 \times 0.01 \times 2 \times \cos(180^\circ - 120^\circ) = -10 \text{ N}$$

diretta verso sinistra.

$$F_y - G_y = \rho Q V \sin(\pi - \alpha) = 1000 \times 0.01 \times 2 \times \sin(180^\circ - 120^\circ) = 17.3 \text{ N}$$

diretta verso il basso.

Esercizio 4.11

L'irrigatore in Figura 4.19 è alimentato con una portata $Q = (50 + 10 \times C_u)$ l/min. Il diametro degli ugelli è $d = 6$ mm e il raggio della girandola è $R = (80 + 10 \times C_{pu})$ mm. Calcolare:

- la velocità di efflusso;
- la velocità angolare uniforme a regime trascurando la coppia d'attrito sull'asse di rotazione.

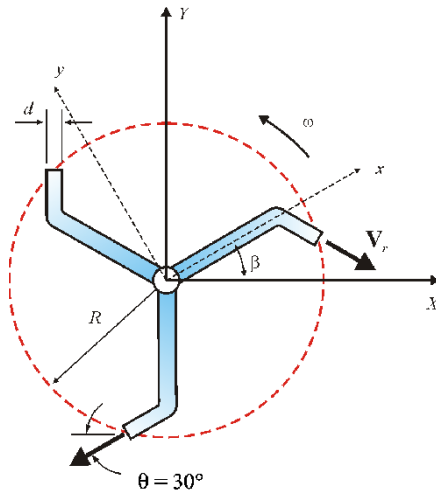


Figura 4.19. Irrigatore a girandola a tre bracci

Soluzione

L'esercizio può essere affrontato scegliendo a) un riferimento inerziale fisso; b) un riferimento non inerziale rotante con la girandola. La scelta del sistema di coordinate è arbitraria: in entrambi i casi si può fissare un sistema di coordinate fisso o mobile.

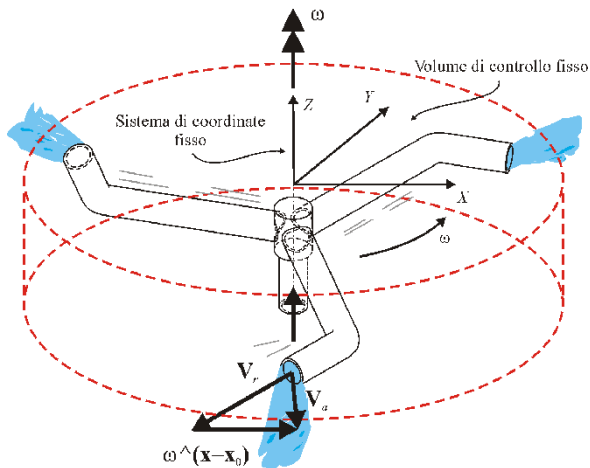


Figura 4.20. Volume di controllo fisso

Scegliamo un volume di controllo cilindrico coassiale in un *referimento inerziale fisso* di dimensioni tali da intersecare con la superficie laterale i tre getti d'acqua in uscita e con la base inferiore la corrente di fluido in ingresso. Scegliamo, inoltre, un sistema di coordinate fisso XYZ con asse Z coincidente con l'asse di rotazione.

Le velocità e le accelerazioni devono essere valutate nel sistema di riferimento del volume di controllo, cioè nel riferimento inerziale fisso. L'equazione vettoriale di bilancio del momento angolare della quantità di moto è la seguente:

$$\mathbf{G}_m + \mathbf{I}_m + \mathbf{\Pi}_m + \mathbf{M}_{1m} - \mathbf{M}_{2m} = 0.$$

Poiché l'unico grado di libertà del sistema è la rotazione attorno all'asse verticale, proiettiamo l'equazione nella direzione dell'asse $Z \equiv z$. Analizziamo i vari contributi.

Il momento delle forze di massa è pari a:

$$G_{mZ} = \int_{CV} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{f}]_Z dV = \int_{CV} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{g}]_Z dV = 0.$$

CV è il volume di controllo, \mathbf{X}_0 è un punto appartenente all'asse Z (ad esempio, l'origine del sistema di coordinate). Il vettore accelerazione di gravità \mathbf{g} è parallelo a Z e il prodotto vettoriale $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{g}$ è sempre ortogonale a un piano che contiene l'asse Z , rispetto al quale ha, quindi, componente nulla.

L'inerzia girotorica locale è pari a:

$$I_{mZ} = - \int_{CV} \left[(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \frac{\partial \rho \mathbf{V}_a}{\partial t} \right]_Z dV = 0$$

poiché l'analisi è in regime stazionario e tutte le variabili e le grandezze caratteristiche del fluido sono indipendenti dal tempo. \mathbf{V}_a è la velocità assoluta del fluido (cioè, per un osservatore nel riferimento inerziale fisso).

La coppia delle forze di superficie è pari a:

$$\Pi_{mZ} = \int_S [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}]_Z dS = 0$$

dato che la pressione del fluido nelle sezioni di sbocco è pari alla pressione atmosferica (la pressione relativa è, quindi, nulla). S è la superficie che delimita il volume di controllo. \mathbf{T} è il tensore degli stress. Alla pressione del fluido nella condotta di alimentazione (parallela a Z) si associa una forza con braccio nullo se la distribuzione di pressione è assialsimmetrica, con componente di coppia nulla lungo l'asse Z , se non è assialsimmetrica.

Il flusso entrante di momento angolare della quantità di moto è pari a:

$$M_{1mZ} = \int_{S_{ingresso}} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}]_Z dS = 0$$

poiché l'unica sezione di ingresso è l'intersezione della condotta di alimentazione con la superficie di base del volume di controllo. Ivi la velocità della corrente nella sezione è parallela all'asse Z e il braccio è nullo, se la distribuzione di velocità è assialsimmetrica. Se non è assialsimmetrica, la componente lungo Z è comunque nulla. Stiamo ipotizzando che la corrente non abbia *swirling*.

L'unico termine non nullo è la componente del flusso di momento angolare della quantità di moto in uscita M_{2mZ} :

$$M_{2mZ} = \int_{S_{uscita}} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}]_Z dS.$$

Nella sezione di uscita di ognuno dei tre tubicini la velocità del fluido ha componenti nel sistema di coordinate rotante solidale alla girandola pari a:

$$\mathbf{V}_r = |\mathbf{V}_r| \sin \theta \mathbf{i}' - |\mathbf{V}_r| \cos \theta \mathbf{j}'$$

\mathbf{i}' e \mathbf{j}' sono i versori del sistema di coordinate rotante. Se β è l'angolo istantaneo (funzione del tempo) tra l'asse x del sistema di coordinate rotante e l'asse X del sistema di coordinate fisso, le componenti istantanee del vettore *velocità relativa* nella sezione di sbocco *lette* nel sistema di coordinate *fisso* sono le seguenti:

$$\mathbf{V}_r = |\mathbf{V}_r| (\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta) \mathbf{i} + |\mathbf{V}_r| (\sin \theta \sin \beta - \cos \theta \cos \beta) \mathbf{j}$$

\mathbf{i} e \mathbf{j} sono i versori lungo X e Y del sistema di coordinate fisso. La velocità relativa si compone con la velocità di trascinamento del sistema di coordinate mobile:

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

\mathbf{V}_a è la velocità nel sistema di coordinate fisso, \mathbf{V}_0 è la velocità di traslazione dell'origine del sistema di coordinate mobile rispetto al sistema di coordinate fisso,

$\boldsymbol{\omega}$ è la velocità di rotazione del sistema di coordinate mobile, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ è il vettore posizione nel sistema di coordinate relativo. Nel nostro caso $\mathbf{V}_0 = 0$ e il vettore velocità angolare è espresso come $\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{k}$; il prodotto vettoriale è, dunque, pari a:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{\omega}| \\ R \cos \beta & R \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{\omega}| R \sin \beta \mathbf{i} + |\boldsymbol{\omega}| R \cos \beta \mathbf{j}.$$

In conclusione, la velocità assoluta della corrente nella sezione di uscita e letta nel sistema di coordinate fisso è pari a:

$$\mathbf{V}_a = [|\mathbf{V}_r| (\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta) - |\boldsymbol{\omega}| R \sin \beta] \mathbf{i} + [|\mathbf{V}_r| (\sin \theta \sin \beta - \cos \theta \cos \beta) + |\boldsymbol{\omega}| R \cos \beta] \mathbf{j} \equiv V_{aX} \mathbf{i} + V_{aY} \mathbf{j}.$$

Per un osservatore in quiete, che osservi l'irrigatore durante il suo funzionamento, il getto degli ugelli non apparirà coassiale ai tubicini nella sezione di efflusso, a causa della componente di trascinamento (vedi Figura 4.20). Il termine $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a$ è uniforme sulla superficie di uscita (la sezione di sbocco del tubicino) e vale:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a = \rho \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos \beta & R \sin \beta & 0 \\ V_{aX} & V_{aY} & 0 \end{vmatrix} = \rho (V_{aY} R \cos \beta - V_{aX} R \sin \beta) \mathbf{k} = \rho (-|\mathbf{V}_r| R \cos \theta + |\boldsymbol{\omega}| R^2) \mathbf{k}.$$

Il modulo della velocità relativa in uscita si può calcolare applicando il principio di conservazione della massa al volume di controllo, ripartendo la portata in ingresso in tre portate uguali (per simmetria) per ogni singolo tubicino:

$$|\mathbf{V}_r| = \frac{4Q}{3\pi d^2}.$$

In definitiva, risulta:

$$\begin{aligned} M_{2mZ} &= \int_{S_{uscita}} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}]_Z dS \\ &= \rho (-|\mathbf{V}_r| R \cos \theta + |\boldsymbol{\omega}| R^2) \int_{S_{uscita}} \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\rho Q R (|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R) \end{aligned}$$

già esteso a tutti e tre i tubicini. Difatti, per continuità risulta:

$$\int_{S_{uscita}} \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n} dS = Q.$$

La velocità angolare di equilibrio, in assenza di attriti, assume il valore che annulla il flusso di momento angolare della quantità di moto in uscita, cioè:

$$-\rho Q R (|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R) = 0 \rightarrow |\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\mathbf{V}_r| \cos \theta}{R}.$$

In tali condizioni, risulta:

$$\mathbf{V}_a = |\mathbf{V}_r| (\sin \theta \cos \beta) \mathbf{i} + |\mathbf{V}_r| (\sin \theta \sin \beta) \mathbf{j} \equiv |\mathbf{V}_r| \sin \theta (\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j})$$

cioè la velocità della corrente in uscita è solo radiale poiché $\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}$ coincide con il versore radiale \mathbf{i}' rotante con l'irrigatore e letto nel sistema di coordinate fisso XYZ .

Eseguiamo gli stessi calcoli fissando un sistema di coordinate rotante xyz . L'unico contributo non nullo è ancora il flusso di momento angolare della quantità di moto in uscita:

$$M_{2mz} = \int_{S_{uscita}} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}]_z dS.$$

Supponiamo, per semplicità, che uno dei tre tubicini sia allineato con l'asse x . La velocità assoluta nella sezione di efflusso, letta nel sistema di coordinate rotante xyz , è pari a:

$$\mathbf{V}_a = |\mathbf{V}_r| \sin \theta \mathbf{i}' - (|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R) \mathbf{j}'.$$

Il braccio avrà componenti:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = R \mathbf{i}'.$$

Quindi:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a = \rho \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ R & 0 & 0 \\ |\mathbf{V}_r| \sin \theta & -(|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R) & 0 \end{vmatrix} = \rho (-|\mathbf{V}_r| R \cos \theta + |\boldsymbol{\omega}| R^2) \mathbf{k}'.$$

Integrando sulla sezione di uscita del singolo tubicino, si calcola il contributo al flusso del singolo tubicino, pari a $1/3$ del flusso totale. Per simmetria, il flusso totale in uscita sarà pari a:

$$\begin{aligned} M_{2mz} &= \int_{S_{uscita}} [(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_a \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n}]_z dS \\ &= \rho (-|\mathbf{V}_r| R \cos \theta + |\boldsymbol{\omega}| R^2) \int_{S_{uscita}} \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\rho Q R (|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R). \end{aligned}$$

Tale espressione coincide con quella calcolata in precedenza facendo uso del sistema di coordinate fisso XYZ . Il risultato finale, come è ovvio, non dipende dalla scelta del sistema di coordinate.

Se scegliamo un volume di controllo nel riferimento *non inerziale* (Figura 4.21), geometricamente definito come il precedente ma rotante insieme alla girandola, l'equazione di bilancio del momento angolare della quantità di moto rimane invariata,

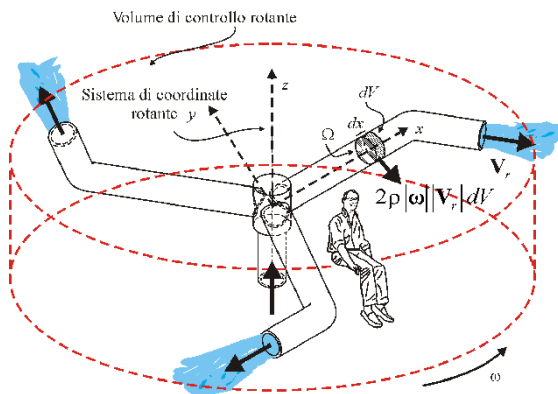


Figura 4.21. Volume di controllo rotante non inerziale

ma le velocità e le accelerazioni devono essere valutate nel sistema rotante relativo (non inerziale). Anche in questo caso siamo liberi di scegliere un sistema di coordinate fisso o rotante. Scegliamo un sistema di coordinate rotante xyz . Alla forza di massa della gravità si aggiungono le forze di massa apparenti (che derivano dal valutare le accelerazioni nel riferimento non inerziale). L'accelerazione relativa da introdurre nel calcolo di \mathbf{G}_m si ottiene dalla composizione vettoriale seguente:

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

con ovvio significato dei termini. Poiché nel caso in esame $\mathbf{a}_0 = 0$, $\mathbf{a}_a = \mathbf{g}$, $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$, risulta:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_r - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)).$$

La coppia dovuta all'azione della gravità ha componente nulla rispetto a z ; la coppia dovuta all'accelerazione centrifuga è nulla poiché accelerazione centrifuga e braccio d'azione $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ sono paralleli. Rimane solo il contributo dovuto all'accelerazione di Coriolis:

$$G_{mz} = \int_{CV} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho(-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_r)]_z dV.$$

Consideriamo il tubicino in uscita coassiale con l'asse x e isoliamo il volumetto $dV = \Omega dx$ con Ω area della sezione trasversale del tubicino. Il vettore posizione avrà componenti $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = x\mathbf{i}'$; la velocità relativa avrà l'unica componente $\mathbf{V}_r = |\mathbf{V}_r|\mathbf{i}'$; il prodotto vettoriale vale $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_r = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{V}_r|\mathbf{j}'$ e, quindi, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho(-2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_r) = -2\rho|\boldsymbol{\omega}||\mathbf{V}_r|x\mathbf{k}'$. Assumiamo, per semplicità, che la porzione terminale del tubicino, che porta alla variazione d'asse di 30° , sia di lunghezza trascurabile. Integrando da 0 a R risulta:

$$\frac{G_{mz}}{3} = \int_0^R -2\rho|\boldsymbol{\omega}||\mathbf{V}_r|\Omega x dx = -\rho|\boldsymbol{\omega}|\frac{Q}{3}R^2.$$

Si può dimostrare che tale risultato vale indipendentemente dalla geometria del tubicino. Il contributo dell'inerzia girotorica locale e del momento delle forze di superficie è nullo. Il flusso di momento angolare di quantità di moto in ingresso è nullo. Il flusso di momento angolare di quantità di moto in uscita è pari a:

$$\begin{aligned} M_{2mz} &= \int_{S_{uscita}} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \rho \mathbf{V}_r \mathbf{V}_r \cdot \mathbf{n}']_z dS \\ &= \rho (-|\mathbf{V}_r| R \cos \theta) \int_{S_{uscita}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}' dS = -\rho Q R |\mathbf{V}_r| \cos \theta \end{aligned}$$

già esteso a tutti e tre i tubicini.

In condizioni di equilibrio, risulta:

$$G_{mz} - M_{2mz} = +\rho Q R |\mathbf{V}_r| \cos \theta - \rho |\boldsymbol{\omega}| Q R^2 = \rho Q R (|\mathbf{V}_r| \cos \theta - |\boldsymbol{\omega}| R) = 0$$

che coincide con l'espressione trovata scegliendo un volume di controllo in un riferimento inerziale. Nel secondo schema analizzato (riferimento rotante non inerziale), a regime la coppia generata dal fluido in uscita è bilanciata dalla coppia inerziale generata dalla distribuzione di forze di superficie (essenzialmente di pressione) sulle pareti interne dei tubicini. Tale distribuzione di forze di superficie è tale da deviare la corrente dal moto rettilineo uniforme, forzandola a seguire anche il moto circolare del tubicino, con traiettorie che, per un osservatore esterno fisso, sono delle spirali.

Naturalmente i risultati sarebbero identici, eseguendo le opportune trasformazioni, se il sistema di coordinate fosse stato scelto fisso e coincidente, ad esempio, con il sistema XYZ .

In definitiva, la scelta del riferimento e del sistema di coordinate non modifica i risultati e deve essere condotta in modo da semplificare convenientemente i calcoli.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$Q = 50 \text{ l/min}$, $d = 6 \text{ mm}$, $R = 80 \text{ mm}$

$$|\mathbf{V}_r| = \frac{4Q}{3\pi d^2} = \frac{4 \times 50 \times 10^{-3}/60}{3 \times \pi \times (6.0 \times 10^{-3})^2} = 9.82 \text{ m/s}$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\mathbf{V}_r| \cos \theta}{R} = \frac{9.82 \times \cos 30^\circ}{80 \times 10^{-3}} = 106.3 \text{ s}^{-1}.$$

Esercizio 4.12

Dal serbatoio in Figura 4.22 fuoriesce un getto d'acqua circolare di diametro $d = 50$ mm, con velocità relativa al serbatoio pari a $V = 4.9$ m/s. Il baricentro dell'orifizio di uscita ha un affondamento pari a $z_G = (1500 + 20 \times C_u)$ mm. Calcolare:

- l'azione del getto, se il serbatoio è in quiete;
- l'azione del getto, se il serbatoio si muove in verso opposto al getto con velocità $U = (1.2 + C_{pu}/10)$ m/s (assumendo invariata la velocità relativa V);
- per il caso precedente, il lavoro della corrente sul carrello per unità di tempo.

◇ Il coefficiente di contrazione è unitario. Si assuma un regime stazionario.

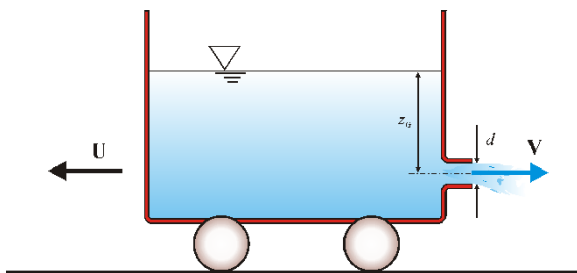


Figura 4.22. Serbatoio su ruote con getto d'acqua in uscita

Soluzione

Scegliamo il volume di controllo tratteggiato in Figura 4.23.

Dal bilancio della quantità di moto proiettato in direzione orizzontale, risulta:

$$\cancel{G_x} + \Pi_x + \cancel{I_x} + \cancel{M_{1x}} - M_{2x} = 0.$$

Quindi, l'azione delle forze di superficie sul volume di controllo è pari al flusso di quantità di moto in uscita (che ha solo componente secondo l'asse x). Per il principio di azione e reazione, l'azione esercitata dal fluido del volume di controllo sulle pareti fisiche del contenitore, è uguale ed opposta al flusso di quantità di moto in uscita:

$$F = -\Pi_x = -M_{2x}.$$

La velocità del getto è assegnata ed è sempre minore della velocità Torricelliana $V = \sqrt{2gz_G}$, come deve essere per la presenza delle dissipazioni.

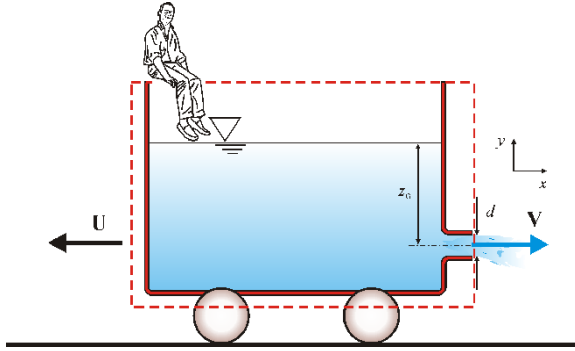


Figura 4.23. Volume di controllo solidale al serbatoio

La spinta ha modulo pari a:

$$F = \rho V^2 \Omega = \rho V^2 \frac{\pi d^2}{4}$$

ed è diretta verso sinistra.

Se il serbatoio è in moto uniforme, la spinta non cambia. Difatti, se il volume di controllo è mobile con il serbatoio, il flusso di quantità di moto in ingresso è ancora nullo e il flusso di quantità di moto in uscita è invariato rispetto al caso di serbatoio in quiete.

Il lavoro della corrente sul serbatoio nell'unità di tempo (potenza), è pari a:

$$P = FU.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$z_G = 1500 \text{ mm}, U = 1.2 \text{ m/s}.$$

La velocità Torricelliana del getto è pari a

$$V = \sqrt{2gz_G} = \sqrt{2 \times 9.806 \times 1.5} = 5.42 \text{ m/s}.$$

La velocità effettiva è assegnata ed è pari a $V = 4.90 \text{ m/s}$.

La spinta ha modulo pari a:

$$F = \rho V^2 \frac{\pi d^2}{4} = 1000 \times 4.90^2 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} = 47.1 \text{ N}$$

e la potenza del getto è pari a:

$$P = FU = 47.1 \times 1.2 = 56.5 \text{ W}.$$

Esercizio 4.13

Il carrello in Figura 4.24 si muove senza attrito spinto dal getto d'acqua. Partendo dalla quiete, il carrello, di massa $M = 3$ kg, deve accelerare con accelerazione costante e pari a $a = (2 + 0.1 \times C_{pu})$ m/s². L'angolo di uscita del getto è $\alpha = (90 + 10 \times C_u)^\circ$ e la velocità di efflusso è costante e pari a $V = (10 + C_{pu})$ m/s. Calcolare:

- la legge di variazione nel tempo dell'area $A(t)$ dell'ugello;
- il valore di A all'istante $t = 3$ s;
- la legge di variazione della potenza della forza agente sul carrello.

◇ Si assuma che la velocità di efflusso sia indipendente dall'area del getto. Si assuma un coefficiente di contrazione unitario. Si trascuri l'inerzia locale.

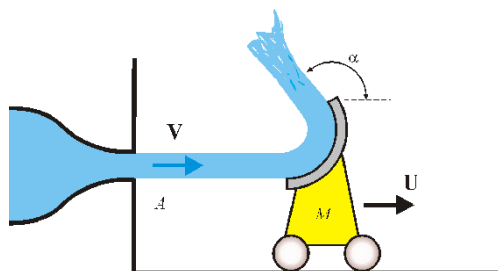


Figura 4.24. Carrello spinto da un getto

Soluzione

Scelto il riferimento mobile in Figura 4.25 (in generale non inerziale), trascurando l'inerzia locale del fluido, la spinta esercitata dal getto è pari a:

$$F = \rho A(t) [V - U(t)]^2 (1 - \cos \alpha)$$

e si annulla quando $U(t) = V$.

Sostituendo, risulta:

$$\rho A(t) [V - U(t)]^2 (1 - \cos \alpha) = F = Ma.$$

Se l'accelerazione è costante, la variazione della velocità del carrello è lineare:

$$U(t) = \cancel{U(0)} + at = at.$$

Sostituendo l'espressione di $U(t)$ e invertendo, si ricava la legge oraria dell'area dell'ugello:

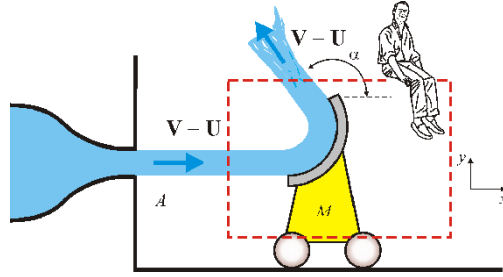


Figura 4.25. Volume di controllo mobile solidale al carrello

$$A(t) = \frac{Ma}{\rho [V - at]^2 (1 - \cos \alpha)}$$

valida per $0 \leq t < V/a$.

La potenza della forza del getto sul carrello è pari a:

$$P = FU = Ma^2 t.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$a = 2 \text{ m/s}^2, \alpha = 90^\circ, V = 10 \text{ m/s}$$

$$A(t) = \frac{Ma}{\rho [V - at]^2 (1 - \cos \alpha)} = \frac{3 \times 2}{1000 [10 - 2t]^2} \text{ m}^2 \text{ (t espresso in secondi)}$$

$$A(3.0) = \frac{3 \times 2}{1000 \times (10 - 2 \times 3)^2} = 3.75 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$P = Ma^2 t = 3 \times 2^2 \times t = 12 \times t \text{ W (t espresso in secondi).}$$

Esercizio 4.14

Il carrello in Figura 4.26, di massa $M = (10 + C_{pu})$ kg, si muove senza attrito su un piano orizzontale con una velocità iniziale $U_0 = 12.5$ m/s. All'istante $t = 0$ il carrello viene investito da un getto d'acqua che fuoriesce da un ugello di area della sezione trasversale pari a $A = (900 + 10 \times C_u)$ mm², con una velocità media $V = 8.3$ m/s. Il getto viene deviato verso l'alto e si allontana formando un angolo di 60° rispetto all'orizzontale. Calcolare:

- la spinta del getto sul carrello all'istante $t = 0$;
- il tempo di arresto del carrello;
- lo spazio percorso dal carrello dall'istante $t = 0$ fino all'arresto.

◇ Si trascurino gli effetti inerziali. Si assuma un coefficiente di contrazione unitario.

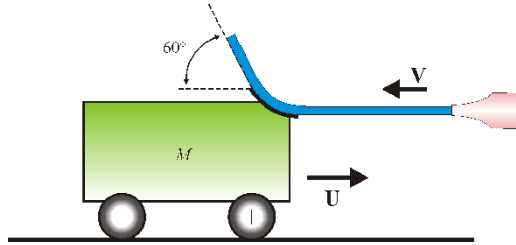


Figura 4.26. Carrello investito da un getto

Soluzione

Scelto un volume di controllo solidale al carrello e il sistema di coordinate riportato in Figura 4.27, applicando il bilancio di quantità di moto e trascurando l'inerzia locale, si ricava la spinta esercitata dal getto. Detta spinta ha componente orizzontale pari a:

$$F_x = -\rho (V + U(t))^2 A (1 - \cos 60^\circ)$$

diretta verso sinistra, e componente verticale pari a:

$$F_y = -\rho (V + U(t))^2 A \sin 60^\circ$$

diretta verso il basso. Abbiamo trascurato il peso del getto.

La spinta iniziale ha componenti pari a:

$$F_x(t_0) = -\rho (V + U_0)^2 A (1 - \cos 60^\circ)$$

$$F_y(t_0) = -\rho (V + U_0)^2 A \sin 60^\circ.$$

Per il calcolo del tempo e dello spazio di arresto, si rende necessario ricavare la legge oraria del moto. Applicando l'equazione della dinamica, risulta:

$$M \frac{dU}{dt} + \rho (V + U(t))^2 A (1 - \cos 60^\circ) = 0.$$

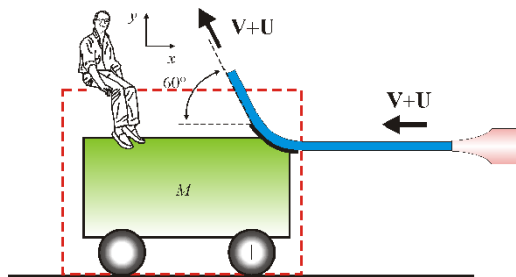


Figura 4.27. Volume di controllo mobile solidale al carrello

Introducendo la variabile ausiliaria $z = U + V$, risulta $dz = dU$ (V è costante) e quindi:

$$M \frac{dz}{dt} + \rho z^2 A (1 - \cos 60^\circ) = 0$$

e, separando le variabili:

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2} + \int_{t_0}^t \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) dt = 0 \rightarrow \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) (t - t_0).$$

Posto $t_0 = 0$ e sostituendo le variabili originarie, risulta:

$$\frac{1}{V + U} - \frac{1}{V + U_0} = \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t.$$

La legge oraria del moto è la seguente:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{V + U_0} + \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t} - V.$$

Il tempo di arresto del carrello si calcola ponendo $U = 0$ e vale:

$$t_{arresto} = \frac{\frac{1}{V} - \frac{1}{V + U_0}}{\frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ)}.$$

Lo spazio percorso fino all'arresto si ottiene integrando la legge oraria del moto:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\frac{1}{V + U_0} + \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t} - V \rightarrow \\ \int_{x_0}^x dx &= \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{\frac{1}{V + U_0} + \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t} - V \right) dt \end{aligned}$$

da cui:

$$x - x_0 = \frac{M}{\rho A (1 - \cos 60^\circ)} \ln \left(\frac{\frac{1}{V + U_0} + \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t}{\frac{1}{V + U_0} + \frac{\rho A}{M} (1 - \cos 60^\circ) t_0} \right) - V (t - t_0)$$

per $t_0 = 0$ e $t = t_{arresto}$ risulta:

$$x_{arresto} = \frac{M}{\rho A (1 - \cos 60^\circ)} \left[\ln \left(1 + \frac{U_0}{V} \right) - \frac{U_0}{(U_0 + V)} \right].$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$F_x(t_0) = -\rho(V + U_0)^2 A (1 - \cos 60^\circ) =$$

$$-1000 \times (8.3 + 12.5)^2 \times 900 \times 10^{-6} \times (1 - \cos 60^\circ) = -194 \text{ N}$$

$$F_y(t_0) = -\rho(V + U_0)^2 A \sin 60^\circ =$$

$$-1000 \times (8.3 + 12.5)^2 \times 900 \times 10^{-6} \times \sin 60^\circ = -337 \text{ N}$$

$$t_{arresto} = 1.609 \text{ s}$$

$$x_{arresto} = 7.07 \text{ m.}$$

Esercizio 4.15

Nella riduzione verticale in Figura 4.28 scorre del fluido di peso specifico relativo all'acqua pari a 0.8. La portata è di $0.6 \text{ m}^3/\text{s}$ e la pressione relativa nella sezione più larga è pari a 20 kPa.

- Calcolare la spinta sulla riduzione tenendo conto del peso del fluido.

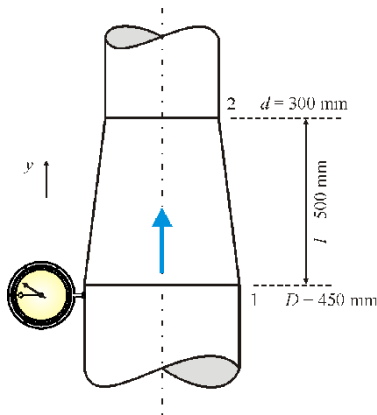


Figura 4.28. Riduzione di condotta in verticale

Soluzione

La velocità nella sezione 1 è pari a:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.6}{\pi \times 0.45^2} = 3.77 \text{ m/s}$$

e nella sezione 2 è pari a:

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.6}{\pi \times 0.3^2} = 8.49 \text{ m/s}.$$

La pressione nella sezione 2 si calcola applicando il Teorema di Bernoulli (trascurando le dissipazioni):

$$p_2 = p_1 + (y_1 - y_2) \gamma + \gamma \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} =$$

$$20\,000 - 0.5 \times 9806 \times 0.8 + 9806 \times 0.8 \times \frac{3.77^2 - 8.49^2}{2 \times 9.806} = -7.1 \text{ kPa}.$$

Nella sezione 2 la pressione risulta, quindi, inferiore alla pressione atmosferica.

Il bilancio di quantità di moto proiettato lungo la verticale, risulta:

$$G_y + \Pi_{0y} + \Pi_{1y} + \Pi_{2y} + \int_y M_{1y} - M_{2y} = 0$$

e, sostituendo:

$$-\gamma V_T - F_y + p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi d^2}{4} + \rho Q V_1 - \rho Q V_2 = 0.$$

$F_y = -\Pi_{0y}$ è l'azione esercitata dal fluido nel volume di controllo sulle pareti della condotta.

V_T è il volume del tronco di cono, pari a:

$$V_T = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi D^2}{4} 3l - \frac{\pi d^2}{4} 2l \right) = \frac{\pi \times 0.45^2}{4} \times 0.5 - \frac{\pi \times 0.3^2}{12} \times 2 \times 0.5 = 0.056 \text{ m}^3.$$

Sostituendo, risulta:

$$F_y = -9806 \times 0.8 \times 0.056 + 20\,000 \times \frac{\pi \times 0.45^2}{4} + 7100 \times \frac{\pi \times 0.3^2}{4} +$$

$$800 \times 0.6 \times 3.77 - 800 \times 0.6 \times 8.49 = 978 \text{ N}.$$

Tale forza è diretta verso l'alto.

Esercizio 4.16

Nel sistema in Figura 4.29 il carrello avanza con una velocità iniziale $U_0 = 10$ m/s. Il getto esercita una spinta nel verso contrario al moto iniziale. Calcolare:

- la spinta iniziale;
 - il tempo necessario per l'arresto.
- ◇ Si trascuri l'inerzia locale del fluido.

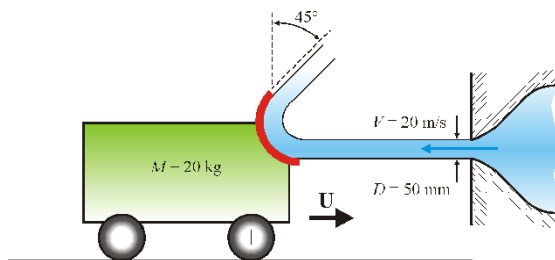


Figura 4.29. Carrello investito da un getto d'acqua

Soluzione

Scelto un sistema di riferimento non inerziale solidale al carrello, applicando il bilancio di quantità di moto e trascurando l'inerzia locale si calcola la spinta iniziale del getto, diretta verso sinistra, pari a:

$$F = -\rho \frac{\pi D^2}{4} (U_0 + V) |U_0 + V| (1 + \sin 45^\circ) =$$

$$-1000 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times (10 + 20) \times |10 + 20| \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3016 \text{ N}.$$

Per calcolare il tempo di arresto è necessario risolvere l'equazione differenziale del moto:

$$M \frac{dU}{dt} = -\rho \frac{\pi D^2}{4} (U + V) |U + V| (1 + \sin 45^\circ).$$

Introducendo la variabile ausiliaria $z = U + V$ risulta $\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt}$, poiché V è costante. Per $z > 0$ risulta:

$$\frac{dz}{dt} + \underbrace{\frac{\rho \frac{\pi D^2}{4}}{M} (1 + \sin 45^\circ)}_k z^2 = 0 \rightarrow \frac{dz}{dt} + kz^2 = 0.$$

L'equazione può essere integrata tra l'istante iniziale nullo e l'istante t come segue:

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2} = - \int_0^t k dt \rightarrow \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = kt$$

ovvero:

$$\frac{1}{U+V} - \frac{1}{U_0+V} = kt.$$

L'istante di arresto si ottiene imponendo $U = 0$:

$$t = \frac{U_0}{kV(V+U_0)} \rightarrow t = \frac{MU_0}{\rho \frac{\pi D^2}{4} (1 + \sin 45^\circ) V(V+U_0)} =$$

$$\frac{20 \times 10}{1000 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times (1 + \sin 45^\circ) \times 20 \times (20 + 10)} = 0.099 \text{ s.}$$

Esercizio 4.17

Sul fondo di un recipiente pieno d'acqua per l'altezza $h = 1.20$ m (Figura 4.30) è ricavata una luce circolare di diametro $d = 0.10$ m. La sezione contratta si forma a distanza d dalla parete dell'orifizio e il coefficiente di contrazione è pari a $C_c = 0.62$. Il getto si immerge a distanza $H = 3.40$ m dalla sezione contratta in un recipiente di diametro $D = 1.20$ m pieno d'acqua con un tirante idrico $h/2$. Calcolare:

- la portata in uscita dal foro;
- la spinta al fondo del recipiente inferiore.

Soluzione

Applicando il Teorema di Bernoulli per una traiettoria tra il pelo libero del serbatoio superiore e la sezione contratta risulta:

$$V_c = \sqrt{2g(h+d)} = \sqrt{2 \times 9.806 \times (1.20 + 0.10)} = 5.05 \text{ m/s.}$$

La portata effluente è pari a:

$$Q = V_c C_c \frac{\pi d^2}{4} = 5.05 \times 0.62 \times \frac{\pi \times 0.10^2}{4} = 24.6 \text{ l/s.}$$

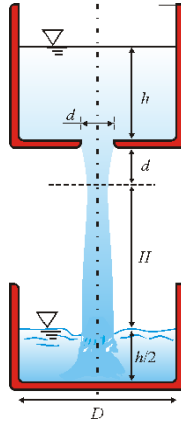


Figura 4.30. Serbatoi in cascata con efflusso dal fondo

Per calcolare la spinta al fondo del recipiente in basso, applichiamo il bilancio di quantità di moto in direzione verticale:

$$G + \cancel{M_{1y}} - S_y + M_{1y} - \cancel{M_{2y}} = 0.$$

Il peso è dovuto al fluido nel contenitore in basso ed è pari a:

$$G = \gamma \frac{\pi D^2}{4} \frac{h}{2} = 9806 \times \frac{\pi \times 1.20^2}{4} \times \frac{1.20}{2} = 6654 \text{ N}.$$

Nell'ipotesi che le dissipazioni siano trascurabili anche per il getto in aria, la velocità di arrivo del getto nel serbatoio inferiore si calcola ancora utilizzando il Teorema di Bernoulli, ed è pari a:

$$V_F = \sqrt{2g(h + d + H)} = \sqrt{2 \times 9.806 \times (1.20 + 0.10 + 3.40)} = 9.6 \text{ m/s}.$$

Il flusso di quantità di moto in ingresso è, dunque, pari a:

$$M_{1y} = \rho Q V_F = 1000 \times 24.6 \times 10^{-3} \times 9.6 = 236 \text{ N}.$$

La spinta del fluido sul fondo del contenitore in basso è pari a:

$$S_y = G + M_{1y} = 6654 + 236 = 6890 \text{ N}.$$

Esercizio 4.18

Nella riduzione in Figura 4.31 fluisce del fluido di peso specifico relativo all'acqua pari a 0.8. La pressione *relativa* nella sezione maggiore è di 88 kPa; la pressione *assoluta* nella sezione ristretta è di 109 kPa. Il volume della riduzione è $V_T = 0.6 \text{ m}^3$.

- Calcolare la spinta sulla riduzione tenendo conto del peso del fluido.
- Disegnare la linea dei carichi piezometrici e dei carichi effettivi (o totali).

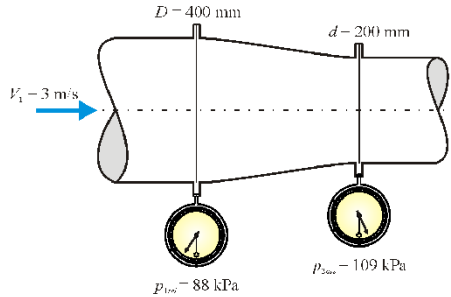


Figura 4.31. Riduzione di condotta orizzontale

Soluzione

Eseguiamo i calcoli con riferimento al valore relativo della pressione. Calcoliamo la pressione relativa nella sezione ristretta:

$$p_{2rel} = p_{2ass} - p_{atm} = 109\,000 - 101\,000 = 8\text{ kPa}.$$

Scegliamo il sistema di coordinate in Figura 4.32.

L'equazione di bilancio di quantità di moto proiettata in direzione x per il volume di controllo in tratteggio in Figura 4.32 è la seguente:

$$\cancel{G_x} + \cancel{f_x} + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + \Pi_{0x} + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

cioè:

$$F_x = -\Pi_{0x} = (p_{1rel} + \rho V_1^2) \frac{\pi D^2}{4} - (p_{2rel} + \rho V_2^2) \frac{\pi d^2}{4}.$$

Π_0 è l'azione esercitata dalla riduzione sul volume di controllo, uguale ed opposta alla spinta incognita \mathbf{F} esercitata sulla riduzione. La portata è pari a:

$$Q = V_1 \frac{\pi D^2}{4} = 3 \times \frac{\pi \times 0.4^2}{4} = 0.377 \text{ m}^3/\text{s}.$$

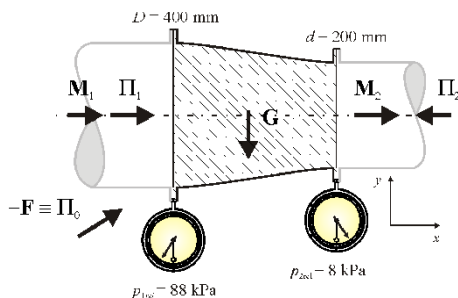


Figura 4.32. Volume di controllo per il calcolo delle azioni

La velocità nella sezione ristretta è pari a:

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.377}{\pi \times 0.2^2} = 12.0 \text{ m/s.}$$

Quindi:

$$F_x = (p_{1rel} + \rho V_1^2) \frac{\pi D^2}{4} - (p_{2rel} + \rho V_2^2) \frac{\pi d^2}{4} =$$

$$(88\,000 + 800 \times 3^2) \times \frac{\pi \times 0.4^2}{4} - (8000 + 800 \times 12^2) \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4} = 8093 \text{ N.}$$

L'equazione di bilancio di quantità di moto in direzione y si riduce alla sola componente peso (trascurando la spinta di Archimede dell'aria):

$$F_y = -\gamma V_T + \cancel{\gamma_{aria} V_T} = -0.8 \times 9806 \times 0.6 = -4707 \text{ N.}$$

La spinta totale ha modulo:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{8093^2 + 4707^2} = 9362 \text{ N.}$$

Si noti che mentre i due vettori di flusso della quantità di moto \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 sono coassiali (nell'ipotesi di distribuzione di velocità della corrente a simmetria radiale), i due vettori spinta sulla superficie di ingresso Π_1 e di uscita Π_2 sono applicati nei rispettivi centri di spinta che, nel caso in esame, sono più in basso rispetto all'asse della condotta. La coppia corrispondente è equilibrata da una opportuna distribuzione di pressione sulle pareti del convergente.

Eseguiamo i calcoli con riferimento al valore assoluto della pressione. In tal caso è necessario includere la spinta dovuta alla pressione atmosferica agente sulla superficie laterale esterna della riduzione. La risultante di questa spinta, trascurando il gradiente verticale di pressione dell'aria, ha solo la componente secondo l'asse x , è diretta verso sinistra ed è pari a:

$$-p_{atm} \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right)$$

indipendentemente dalla forma del riduttore. L'equazione di bilancio di quantità di moto proiettata in direzione x è la seguente:

$$F_x = (p_{1ass} + \rho V_1^2) \frac{\pi D^2}{4} - (p_{2ass} + \rho V_2^2) \frac{\pi d^2}{4} - p_{atm} \left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) = \\ (p_{1rel} + \rho V_1^2) \frac{\pi D^2}{4} - (p_{2rel} + \rho V_2^2) \frac{\pi d^2}{4}$$

coincidente con l'espressione calcolata con riferimento ai valori relativi della pressione. Come è intuitivo, la spinta sulla riduzione assume valore indipendente dal riferimento di pressione scelto.

Il carico effettivo nella sezione maggiore rispetto ad un asse baricentrico orizzontale è pari a:

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{88\,000}{0.8 \times 9806} + \frac{3^2}{2 \times 9.806} = 11.68 \text{ m.}$$

Il carico effettivo, rispetto allo stesso asse, nella sezione ristretta è pari a:

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{8000}{0.8 \times 9806} + \frac{12.0^2}{2 \times 9.806} = 8.36 \text{ m.}$$

Il carico piezometrico (relativo) nella sezione maggiore è pari a:

$$h_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{88\,000}{0.8 \times 9806} = 11.22 \text{ m.}$$

Il carico piezometrico (relativo) nella sezione ristretta è pari a:

$$h_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{8000}{0.8 \times 9806} = 1.02 \text{ m.}$$

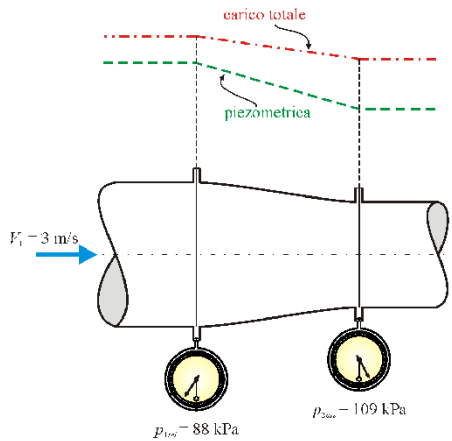


Figura 4.33. Andamento della piezometrica e del carico totale

Il disegno in Figura 4.33 riporta l'andamento qualitativo dei carichi nella riduzione. Il reale andamento delle linee del carico totale e piezometrico dipende dalla geometria della riduzione.

Esercizio 4.19

Una turbina Pelton (Figura 4.34) di raggio $R = 1.0$ m è alimentata da un getto d'acqua cilindrico di diametro $d = 5$ cm con velocità media della corrente $V = 60$ m/s. Calcolare:

- la forza massima agente sulle pale della turbina se l'angolo di uscita è $\beta = 150^\circ$;
- la potenza sviluppata a 200 rpm;
- il rendimento a 200 rpm.

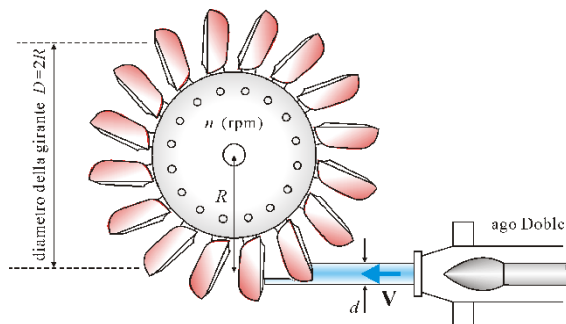


Figura 4.34. Turbina Pelton

Soluzione

Consideriamo un sistema di riferimento non inerziale solidale con la ruota. Per la singola pala a cucchiaio calettata sulla ruota, la trasformazione delle velocità è riportata allo schema visibile in Figura 4.35. U è la velocità periferica della turbina.

La forza esercitata sulla singola pala è pari a:

$$F_{pala} = \rho \frac{\pi d^2}{4} (V - U)^2 (1 - \cos \beta).$$

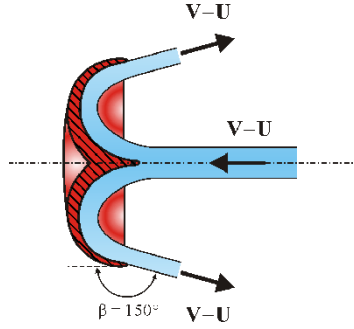


Figura 4.35. Schema delle velocità in un riferimento solidale alla pala mobile

Tale forza è massima se la velocità periferica della turbina è nulla e assume il seguente valore:

$$F_{max} = \rho \frac{\pi d^2}{4} V^2 (1 - \cos \beta) = 1000 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times 60^2 \times (1 - \cos 150^\circ) = 13.2 \text{ kN}.$$

Considerato che, se la turbina è progettata correttamente, è sempre presente almeno una pala in presa, la forza media sul sistema di pale è pari a:

$$F_{media} = \rho Q (V - U) (1 - \cos \beta)$$

cioè tutta la portata Q , non solo la portata ridotta per un osservatore solidale alle pale, contribuisce alla spinta. La potenza media all'asse per un sistema di pale è pari a:

$$P_{asse} = \rho Q (V - U) (1 - \cos \beta) U.$$

Alla velocità di rotazione $n = 200$ rpm la velocità periferica vale:

$$U = \frac{2\pi n}{60} R = \frac{2 \times \pi \times 200}{60} \times 1.0 = 20.95 \text{ m/s}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} P_{asse} &= \rho Q (V - U) (1 - \cos \beta) U = \rho \frac{\pi d^2}{4} V U (V - U) (1 - \cos \beta) = \\ &= 1000 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times 60 \times 20.95 \times (60 - 20.95) \times (1 - \cos 150^\circ) = 180.0 \text{ kW}. \end{aligned}$$

Il rendimento è pari al rapporto tra la potenza all'asse della turbina e la potenza del getto (quest'ultima è solo potenza cinetica poiché il getto è in aria, con una pressione interna pari alla pressione atmosferica e un contributo della gravità

trascurabile):

$$\eta = \frac{P_{asse}}{P_{getto}} = \frac{\rho Q (V - U) (1 - \cos \beta) U}{\gamma Q \frac{V^2}{2g}} = \frac{2 (V - U) (1 - \cos \beta) U}{V^2} =$$

$$\frac{2 \times (60 - 20.95) \times (1 - \cos 150^\circ) \times 20.95}{60^2} = 0.85.$$

Esercizio 4.20

Un diffusore (Figura 4.36) genera una lama d'acqua radiale di spessore $t = 1.5$ mm. La velocità in uscita è $V_2 = 10$ m/s, il raggio è $R = 50$ mm. La lama si estende per un angolo di 180° . Il tubo di alimentazione ha diametro $D = 50$ mm e il manometro indica una pressione relativa $p_1 = 150$ kPa. Calcolare:

- la portata Q che alimenta il diffusore;
- le forze e le coppie che sollecitano la flangia.

◇ Trascurare il peso del fluido.

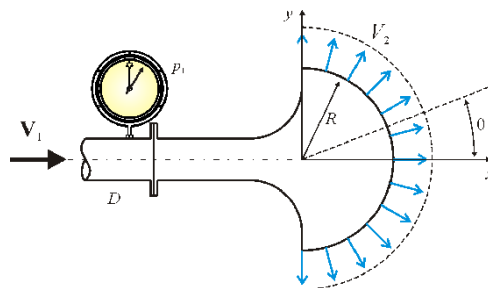


Figura 4.36. Diffusore con lama d'acqua radiale

Soluzione

La portata in uscita dal diffusore si calcola per integrazione ed è pari a:

$$Q = \pi R t V_2 = \pi \times 50 \times 10^{-3} \times 1.5 \times 10^{-3} \times 10 = 2.36 \text{ l/s.}$$

Per continuità, la velocità nella condotta di alimentazione è pari a:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2.36 \times 10^{-3}}{\pi \times (50 \times 10^{-3})^2} = 1.2 \text{ m/s.}$$

Per il calcolo delle forze e delle coppie trascuriamo il peso del fluido.

Scelto il sistema di coordinate in Figura 4.36, l'equilibrio alla traslazione in direzione y è soddisfatto per simmetria. L'equilibrio alla traslazione in direzione x richiede che:

$$\Pi_{0x} + \Pi_{1x} + \cancel{\Pi_{2x}} + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

cioè:

$$\begin{aligned} -F_x + p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_1^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_2^2 \cos \theta t R d\theta &= 0 \rightarrow \\ F_x = p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_1^2 \frac{\pi D^2}{4} - \rho V_2^2 t R \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} &= p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_1^2 \frac{\pi D^2}{4} - 2\rho V_2^2 t R \end{aligned}$$

con $F_x = -\Pi_{0x}$ l'azione esercitata dal fluido nel volume di controllo sul dispositivo diffusore e, in definitiva, sulla flangia. La coppia è nulla per simmetria.

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\begin{aligned} F_x &= p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_1^2 \frac{\pi D^2}{4} - 2\rho V_2^2 t R = \\ 150 \times 10^3 \times \frac{\pi \times (35 \times 10^{-3})^2}{4} &+ 1000 \times 1.2^2 \times \frac{\pi \times (35 \times 10^{-3})^2}{4} - \\ 2 \times 1000 \times 10^2 \times 1.5 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-3} &= 130 \text{ N.} \end{aligned}$$

Esercizio 4.21

Una condotta di diametro $D = 150$ mm ha un terminale diffusore collegato con una flangia. Il diffusore ha lungo la generatrice un'apertura rettangolare di altezza $h = 15$ mm e lunghezza $l = 1.0$ m, attraverso la quale l'acqua fuoriesce in direzione ortogonale all'asse con la distribuzione di velocità riportata in Figura 4.37. La fessura si apre a distanza $b = 0.2$ m dalla flangia. La pressione relativa nella sezione flangiata è $p_{in} = 30$ kPa. Calcolare:

- la portata Q che alimenta il diffusore;
- le forze e le coppie che sollecitano la flangia.

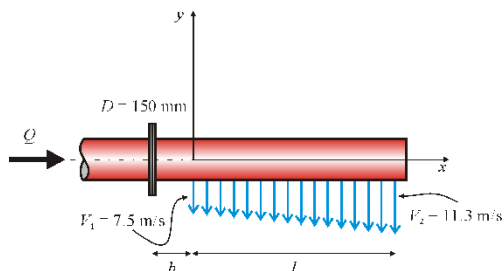


Figura 4.37. Diffusore con lama d'acqua lungo una generatrice

Soluzione

Fissato il sistema di coordinate in Figura 4.37, la velocità in uscita varia secondo l'equazione seguente:

$$V_y(x) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l}x.$$

Applicando l'equazione di conservazione della massa, risulta:

$$Q = \int_0^l V_y(x)h dx = \frac{V_1 + V_2}{2}lh = \frac{7.5 + 11.3}{2} \times 1 \times 0.015 = 0.141 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La velocità in ingresso è pari a:

$$V_{in} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.141}{\pi \times 0.15^2} = 7.98 \text{ m/s}.$$

Il bilancio di quantità di moto proiettato nella direzione x risulta:

$$-F_x + p_{in} \frac{\pi D^2}{4} + \rho V_{in}^2 \frac{\pi D^2}{4} = 0.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$F_x = (p_{in} + \rho V_{in}^2) \frac{\pi D^2}{4} = (30\,000 + 1000 \times 7.98^2) \times \frac{\pi \times 0.15^2}{4} = 1655 \text{ N}.$$

Il bilancio di quantità di moto proiettato nella direzione y risulta:

$$-F_y + \int_0^l \rho [V_y(x)]^2 h dx = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_0^l \rho \left(V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l} x \right)^2 h dx = \rho h \int_0^l \left(V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l} x \right)^2 dx = \\
 &\rho h \left[V_1^2 x + \left(\frac{V_2 - V_1}{l} \right)^2 \frac{x^3}{3} + V_1 \frac{V_2 - V_1}{l} x^2 \right] \Big|_0^l = \\
 &\rho h \left[V_1^2 l + (V_2 - V_1)^2 \frac{l}{3} + V_1 (V_2 - V_1) l \right] \\
 F_y &= \rho h \left[V_1^2 + V_2^2 + V_1 V_2 \right] \frac{l}{3} =
 \end{aligned}$$

$$1000 \times 0.015 \times [7.5^2 + 11.3^2 + 7.5 \times 11.3] \times \frac{1}{3} = 1343 \text{ N.}$$

Il bilancio di momento angolare della quantità di moto proiettato secondo z , risulta:

$$-M_z + \int_0^l \rho [V_y(x)]^2 (x + b) h dx = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 M_z &= \int_0^l \rho \left(V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l} x \right)^2 (x + b) h dx = \\
 &\rho h b \int_0^l \left(V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l} x \right)^2 dx + \rho h \int_0^l \left(V_1 + \frac{V_2 - V_1}{l} x \right)^2 x dx = \\
 &\rho h b \left[V_1^2 x + \left(\frac{V_2 - V_1}{l} \right)^2 \frac{x^3}{3} + V_1 \frac{V_2 - V_1}{l} x^2 \right] \Big|_0^l + \\
 &\rho h \left[V_1^2 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{V_2 - V_1}{l} \right)^2 \frac{x^4}{4} + 2V_1 \frac{V_2 - V_1}{l} \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^l = \\
 &\rho h b \left[V_1^2 l + (V_2 - V_1)^2 \frac{l}{3} + V_1 (V_2 - V_1) l \right] + \\
 &\rho h \left[V_1^2 \frac{l^2}{2} + (V_2 - V_1)^2 \frac{l^2}{4} + V_1 (V_2 - V_1) \frac{2l^2}{3} \right].
 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\begin{aligned}
 M_z &= \rho h b [V_1^2 + V_2^2 + V_1 V_2] \frac{l}{3} + \rho h \left[\frac{V_1^2}{12} + \frac{V_2^2}{4} + \frac{1}{6} V_1 V_2 \right] l^2 = \\
 &1000 \times 0.015 \times 0.2 \times [7.5^2 + 11.3^2 + 7.5 \times 11.3] \times \frac{1}{3} + \\
 &1000 \times 0.015 \times \left[\frac{7.5^2}{12} + \frac{11.3^2}{4} + \frac{1}{6} \times 7.5 \times 11.3 \right] \times 1^2 = 1030 \text{ Nm.}
 \end{aligned}$$

Esercizio 4.22

Un veicolo a cuscino d'aria (Figura 4.38) è supportato da aria pressurizzata da un ventilatore. L'aria riempie una camera rettangolare $15 \times 20 \text{ m}^2$ e sfugge all'esterno attraverso una feritoia continua di luce $\delta = 7.5 \text{ cm}$. Il volume della camera è sufficientemente grande da potersi trascurare la velocità media dell'aria. Il peso del veicolo è pari a $P = 45 \text{ kN}$. Calcolare:

- la portata Q necessaria per supportare il veicolo;
 - la potenza del ventilatore se il suo rendimento è pari a 0.5;
 - l'altezza della feritoia se la portata viene ridotta al 60% del valore precedentemente calcolato.
- ◇ Suggerimento: trascurare il flusso di quantità di moto in ingresso. La densità di massa dell'aria è pari a $\rho_{aria} = 1.3 \text{ kg/m}^3$.

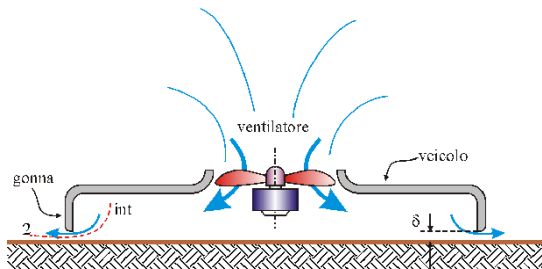


Figura 4.38. Veicolo a cuscino d'aria

Soluzione

Il veicolo è supportato dalla pressione dell'aria nella camera, in eccesso rispetto alla pressione atmosferica. Il calcolo è immediato poiché il flusso di quantità di moto in uscita ha componente esclusivamente orizzontale e, trascurando il flusso di quantità di moto in ingresso attraverso la luce del ventilatore (a causa della ridotta velocità in ingresso e della modesta densità di massa dell'aria), risulta:

$$p_{\text{int}} ab = |\mathbf{P}|.$$

p_{int} è la pressione relativa dell'aria all'interno

a, b = lunghezza dei lati della gonnola

e, quindi:

$$p_{\text{int}} = \frac{|\mathbf{P}|}{ab} = \frac{45\,000}{15 \times 20} = 150 \text{ Pa}.$$

Applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione all'interno e la sezione 2 lungo la traiettoria in Figura 4.38, risulta:

$$p_{\text{int}} + \rho_{\text{aria}} \frac{V_{\text{int}}^2}{2} = p_2 + \rho_{\text{aria}} \frac{V_2^2}{2}$$

e quindi, poiché $V_{\text{int}} \sim 0$ e $p_2 = 0$, risulta:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2p_{\text{int}}}{\rho_{\text{aria}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 150}{1.3}} = 15.2 \text{ m/s}.$$

Conseguentemente la portata volumetrica deve essere pari a:

$$Q = V_2 \delta (2a + 2b) = 15.2 \times 0.075 \times (2 \times 15 + 2 \times 20) = 79.8 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La potenza del ventilatore è pari a:

$$P = \frac{\gamma_{\text{aria}} Q H_d}{\eta} \simeq \frac{Q p_{\text{int}}}{\eta} = \frac{79.8 \times 150}{0.5} = 24 \text{ kW}.$$

H_d è la prevalenza richiesta che, per le basse velocità in gioco e per i bassi valori della densità di massa dell'aria, si riduce alla sola componente pressoria:

$$H_d \simeq \frac{p_{\text{int}}}{\gamma_{\text{aria}}}.$$

Se la portata viene ridotta al 60% del valore calcolato in precedenza, risulta:

$$V_2' \delta' (2a + 2b) = 0.6 V_2 \delta (2a + 2b).$$

Inoltre, poiché la pressione interna deve rimanere invariata, per il teorema di Bernoulli anche la velocità nella sezione di uscita deve rimanere invariata, e quindi:

$$\delta' = 0.6 \delta = 0.6 \times 7.5 = 4.5 \text{ cm}.$$

Esercizio 4.23

Nel dispositivo in Figura 4.39 l'acqua entra verticalmente e fuoriesce lateralmente attraverso una fessura di lunghezza $l = 0.2$ m con una distribuzione di velocità lineare tra 0 e 10 m/s e con spessore della lama costante $h = 0.01$ m. Il diametro della condotta di alimentazione è $D = 25$ mm. Calcolare:

- le tre componenti della spinta esercitata dal fluido sul dispositivo;
 - il loro punto di applicazione.
- ◇ Assumere una distribuzione di velocità uniforme e permanente nella condotta di alimentazione. Trascurare l'effetto della gravità. Assumere una pressione nella sezione di ingresso pari alla pressione atmosferica.

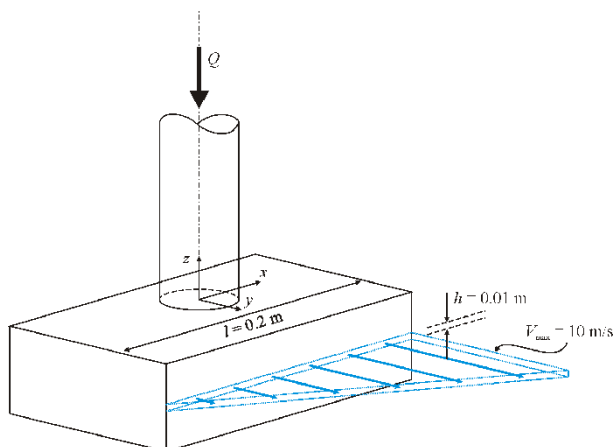


Figura 4.39. Diffusore con lama d'acqua orizzontale

Soluzione

Il bilancio di quantità di moto in forma vettoriale si scrive come segue:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}.$$

Trascuriamo la forza peso. L'inerzia locale è nulla in regime permanente. Proiettando nella direzione x risulta:

$$\Pi_x = 0.$$

Proiettando nella direzione y risulta:

$$F_y = -\Pi_y = -M_{2y}$$

poiché il flusso di quantità di moto entrante ha componente nulla secondo y . Il profilo di velocità varia secondo la relazione seguente:

$$V_y = V_{max} \frac{(x + l/2)}{l}.$$

$V_{max} = 10 \text{ m/s}$ è il valore massimo della velocità in uscita; $l = 0.2 \text{ m}$ è la larghezza della fessura.

Il flusso di quantità di moto uscente è pari a:

$$\begin{aligned} M_{2y} &= \int_{S_u} \rho V_y \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{-l/2}^{l/2} \rho h V_{max}^2 \left(\frac{x + l/2}{l} \right)^2 dx = \\ &= \frac{\rho h V_{max}^2}{3l^2} (x + l/2)^3 \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho h V_{max}^2 l}{3}. \end{aligned}$$

Pertanto, la componente di spinta in direzione y è pari a:

$$F_y = -\frac{\rho h V_{max}^2 l}{3} = -\frac{1000 \times 0.01 \times 10^2 \times 0.2}{3} = -66.7 \text{ N}.$$

Il suo punto di applicazione si ottiene scrivendo l'equazione di bilancio del momento angolare della quantità di moto intorno all'asse z :

$$\cancel{G_{mz}} + \Pi_{mz} + \cancel{I_{mz}} + \cancel{M_{1mz}} - M_{2mz} = 0.$$

Gli unici termini che contribuiscono al bilancio soddisfano la seguente equazione:

$$-F_y x_c = -\Pi_{mz} = -M_{2mz}.$$

x_c è l'ascissa del punto di applicazione della forza F_y . La componente lungo z del momento angolare della quantità di moto in uscita è pari a:

$$M_{2mz} = \int_{S_u} \rho x V_y \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{-l/2}^{l/2} \rho h x V_{max}^2 \left(\frac{x + l/2}{l} \right)^2 dx = \frac{\rho h V_{max}^2 l^2}{12}.$$

Il punto di applicazione di F_y si ottiene imponendo che:

$$F_y x_c = \frac{\rho h V_{max}^2 l^2}{12}$$

da cui:

$$x_c = \frac{\rho h V_{max}^2 l^2}{12 F_y} = \frac{l}{4} = \frac{0.2}{4} = 0.05 \text{ m}.$$

Proiettando nella direzione z risulta:

$$F_z = -\Pi_z = M_{1z}$$

poiché il flusso di quantità di moto uscente ha componente nulla secondo z . Il flusso di quantità di moto entrante vale:

$$M_{1z} = \int_{S_i} \rho V_z \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = -\rho \frac{4Q^2}{\pi D^2}.$$

La portata si ottiene integrando il profilo di velocità sulla fessura:

$$Q = \int_{-l/2}^{l/2} h V_{max} \left(\frac{x + l/2}{l} \right) dx = \frac{h V_{max} l}{2} = \frac{0.01 \times 10 \times 0.2}{2} = 0.01 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Sostituendo, risulta:

$$F_z = -\rho \frac{4Q^2}{\pi D^2} = -1000 \times \frac{4 \times 0.01^2}{\pi \times 0.025^2} = -203.7 \text{ N}.$$

F_z è coassiale alla condotta di alimentazione.

Esercizio 4.24

Un treno si muove con velocità $V = 160 \text{ km/h}$ ed è dotato di un cucchiaino come riportato in Figura 4.40, parzialmente immerso in un canale d'acqua tra le rotaie. La larghezza del cucchiaino è pari a $l = 1.0 \text{ m}$.

- Calcolare la resistenza al moto.

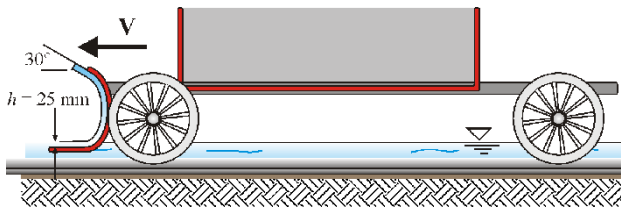


Figura 4.40. Carrozza con cucchiaino immerso in un canale tra le rotaie

Soluzione

Scegliamo un volume di controllo solidale con il treno in moto, come riportato in Figura 4.41. La velocità in ingresso dell'acqua è pari a $V = 160 \text{ km/h} = 44.4 \text{ m/s}$.

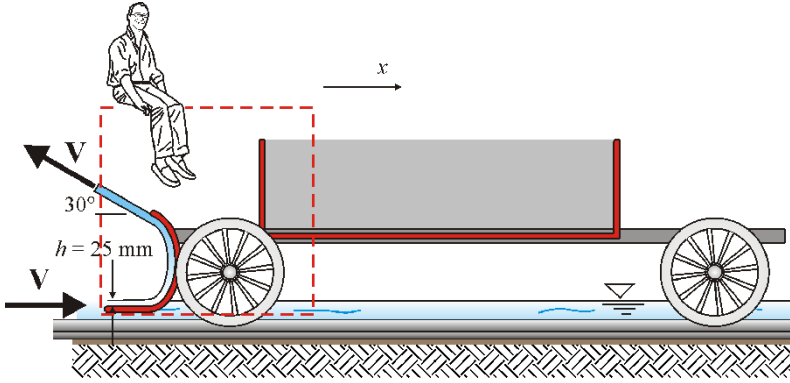


Figura 4.41. Volume di controllo mobile solidale alla carrozza

La resistenza al moto si calcola scrivendo l'equazione di bilancio della quantità di moto per il volume di controllo scelto nel riferimento mobile (che è inerziale):

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$$

Proiettando nella direzione x risulta:

$$G_x + \Pi_x + I_x + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

$$\Pi_x = -M_{1x} + M_{2x} \rightarrow F_x = -\Pi_x = M_{1x} - M_{2x}$$

Tralasciando le dissipazioni e la variazione di quota geodetica, applicando il Teorema di Bernoulli risulta che la velocità della corrente idrica in uscita è ancora pari a V . Quindi:

$$F_x = \rho V^2 l h + \rho V^2 l h \cos 30^\circ = 1000 \times (44.4)^2 \times 1 \times 25 \times 10^{-3} \times (1 + \cos 30^\circ) = 92.0 \text{ kN}$$

diretta nel verso contrario al moto.

Esercizio 4.25

Nel riduttore in Figura 4.42 il diametro in ingresso è $D_1 = 8 \text{ cm}$, il diametro in uscita è $D_2 = 5 \text{ cm}$. La pressione in uscita p_2 coincide con la pressione atmosferica. La velocità dell'acqua in ingresso è $V_1 = 5 \text{ m/s}$ e la lettura al manometro differenziale a mercurio è $h = 58 \text{ cm}$.

- Calcolare la spinta orizzontale sulle flange.

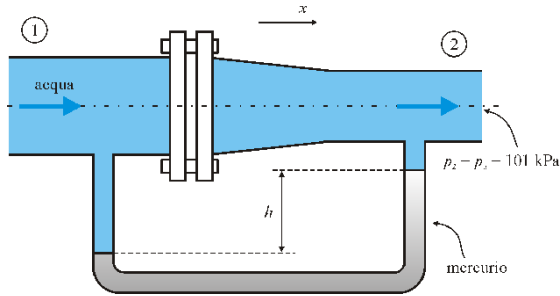


Figura 4.42. Riduttore di sezione di condotta con manometro differenziale a mercurio

Soluzione

La spinta orizzontale si ottiene scrivendo l'equazione di bilancio della quantità di moto per il volume di controllo tratteggiato in Figura 4.43.

Proiettando in direzione x risulta:

$$G_x + \Pi_{0x} + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + I + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

con

$$G_x = 0$$

$$\Pi_{0x} = ?$$

$$\Pi_{1x} = p_{1rel} \frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$\Pi_{2x} = -p_{2rel} \frac{\pi D_2^2}{4}$$

$$I_x = 0$$

$$M_{1x} = \rho \frac{\pi D_1^2}{4} V_1^2$$

$$M_{2x} = \rho \frac{\pi D_2^2}{4} V_2^2.$$

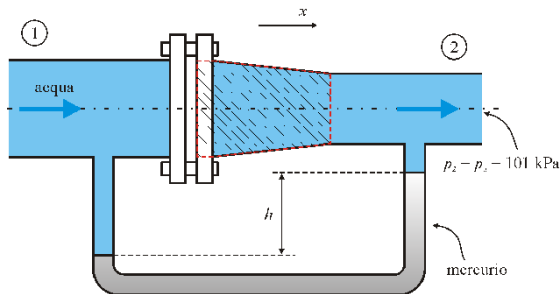


Figura 4.43. Volume di controllo per il calcolo della spinta sulle flange

Π_{0x} è l'azione esercitata dal convergente sul volume di controllo tramite le flange. La pressione relativa p_{1rel} si calcola sulla base della lettura al manometro come segue:

$$p_{1rel} = p_{2rel} + (\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O})h = 0 + 9806 \times (13.8 - 1) \times 0.58 = 72\,800 \text{ Pa.}$$

La velocità V_2 si calcola applicando l'equazione di conservazione della massa:

$$V_2 = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = 5 \times \frac{8^2}{5^2} = 12.8 \text{ m/s.}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \Pi_{0x} &= p_{2rel} \frac{\pi D_2^2}{4} - p_{1rel} \frac{\pi D_1^2}{4} - \rho \frac{\pi D_1^2}{4} V_1^2 + \rho \frac{\pi D_2^2}{4} V_2^2 = \\ &= 0 - 72\,800 \times \frac{\pi \times 0.08^2}{4} - 1000 \times \frac{\pi}{4} \times (0.08^2 \times 5^2 - 0.05^2 \times 12.8^2) = -169.9 \text{ N.} \end{aligned}$$

La spinta sulle flange è pari a $F_x = \Pi_{0x} = 169.9 \text{ N}$ e sollecita i bulloni a trazione.

Esercizio 4.26

L'ugello in Figura 4.44 genera una lama d'acqua di spessore $t = 0.03 \text{ m}$ per tutta la semicirconferenza, con una velocità radiale $V = 15 \text{ m/s}$ a distanza $R = 30 \text{ cm}$ dall'asse.

- Calcolare la portata Q e la forza che è necessario applicare in direzione y per mantenere l'ugello in posizione.

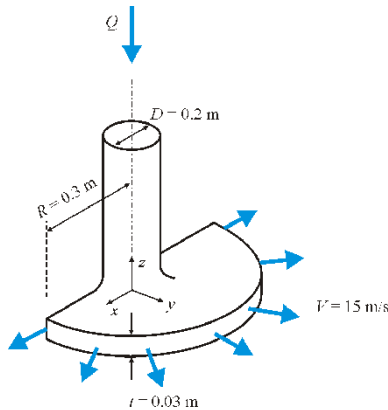


Figura 4.44. Ugello diffusore con lama d'acqua radiale

Soluzione

Scelto il volume di controllo in Figura 4.45, l'equazione di conservazione della massa permette di calcolare la portata:

$$Q = \pi R t V = \pi \times 0.3 \times 0.03 \times 15 = 0.424 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Il bilancio di quantità di moto proiettato in direzione y è il seguente:

$$\cancel{G_y} + \cancel{M_{1y}} + \cancel{M_{2y}} + \Pi_{0y} + \cancel{F_y} + \cancel{M_{1y}} - M_{2y} = 0.$$

La forza incognita Π_{0y} in direzione y deve solo bilanciare il flusso di quantità di moto uscente (componente rispetto ad y). Introdotto il sistema di coordinate polari $\theta - R$ visibile in Figura 4.45, risulta:

$$\Pi_{0y} = M_{2y} = \left(\int_{S_u} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \right)_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho |\mathbf{V}| \cos \theta |\mathbf{V}| R t d\theta = \rho |\mathbf{V}|^2 R t \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$1000 \times 15^2 \times 0.3 \times 0.03 \times 2 = 4.05 \text{ kN}.$$

Tale forza è positiva e, nell'ipotesi di distribuzione simmetrica rispetto al piano intermedio della sezione di efflusso, deve essere applicata lungo la retta comune al piano di simmetria $y - z$ e al piano orizzontale intermedio alla sezione di efflusso.

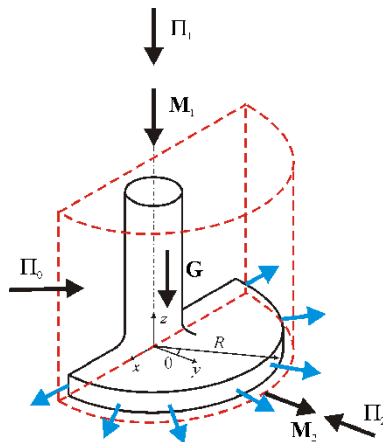


Figura 4.45. Volume di controllo per il calcolo delle azioni

Esercizio 4.27

La barca in Figura 4.46 si muove a velocità costante spinta da un getto d'aria compressa. L'aria fuoriesce da un ugello circolare di diametro $D_e = 3$ cm a pressione atmosferica e a velocità critica ($V_e = 343$ m/s).

La resistenza all'avanzamento è pari a kV^2 con $k = 19$ Ns²/m².

- Calcolare la velocità di equilibrio V_0 .
- ◇ Assumere una densità dell'aria pari a 1.25 kg/m³.

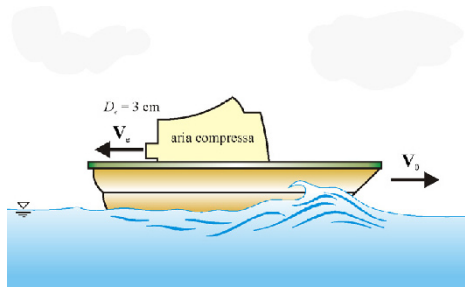


Figura 4.46. Imbarcazione spinta dall'aria compressa

Soluzione

Scegliamo un volume di controllo nel riferimento mobile (Figura 4.47). Se la barca avanza a velocità uniforme, il riferimento è inerziale. *Le velocità devono essere valutate nel sistema di riferimento del volume di controllo, cioè nel riferimento inerziale mobile al quale decidiamo di vincolare il sistema di coordinate X .*

L'equazione di bilancio della quantità di moto proiettata lungo l'asse X è la seguente:

$$\cancel{Q_X} + \cancel{I_X} + \Pi_{0X} + \cancel{\Pi_{1X}} + \cancel{\Pi_{2X}} + \cancel{M_{1X}} - M_{2X} = 0.$$

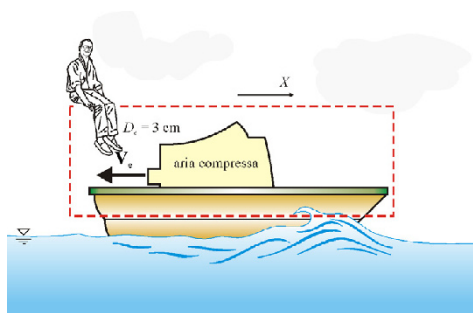


Figura 4.47. Volume di controllo mobile solidale all'imbarcazione

con

$$M_{2X} = \left(\int_{S_u} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \right)_X = -\rho_{aria} V_e^2 \frac{\pi D_e^2}{4}.$$

S_u è la superficie che delimita il volume di controllo. In condizioni di equilibrio risulta:

$$V_0 = V_e D_e \sqrt{\frac{\rho_{aria} \pi}{4k}} = 343 \times 0.03 \times \sqrt{\frac{1.25 \times \pi}{4 \times 19}} = 2.34 \text{ m/s}.$$

Esercizio 4.28

Un contenitore metallico cilindrico avente area della sezione trasversale pari a $A = 0.09 \text{ m}^2$ e altezza h si trova in un ascensore. L'ascensore è *inizialmente fermo*. Il contenitore ha una massa a vuoto $M = 2.5 \text{ kg}$, è posizionato su una bilancia ed è riempito d'acqua dall'alto. La portata immessa fuoriesce lateralmente in basso da due luci di area $A_2 = A_3 = 2.22 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, perfettamente simmetriche. Il livello idrico nel contenitore, in regime permanente, è $h_1 = 0.57 \text{ m}$.

Calcolare:

- la lettura sulla bilancia se $V_1 = 1.5 \text{ m/s}$, $A_1 = 0.009 \text{ m}^2$;
- il valore minimo del coefficiente d'attrito tra fondo del contenitore e piatto della bilancia necessario per evitare lo slittamento del contenitore.

Ad un certo istante l'ascensore si muove verso l'alto di moto *accelerato* con $a = 1 \text{ m/s}^2$.

Calcolare:

- il nuovo livello d'acqua nel serbatoio;
- il nuovo valore minimo del coefficiente d'attrito tra fondo del contenitore e piatto della bilancia necessario per evitare lo slittamento del contenitore.

Ad un istante successivo l'ascensore si muove di *moto uniforme* ($a = 0$) e il flusso attraverso la sezione 2 viene interrotto.

Calcolare:

- il valore minimo di h necessario affinché l'acqua non raggiunga il coperchio del contenitore;
- il valore minimo del coefficiente d'attrito tra fondo del contenitore e piatto della bilancia necessario per evitare lo slittamento del contenitore in questa nuova condizione.

◇ Suggestimenti: assumere un coefficiente di contrazione unitario per tutte le sezioni e trascurare gli effetti delle dissipazioni. Assumere che la velocità del fluido al pelo libero nel contenitore sia trascurabile.

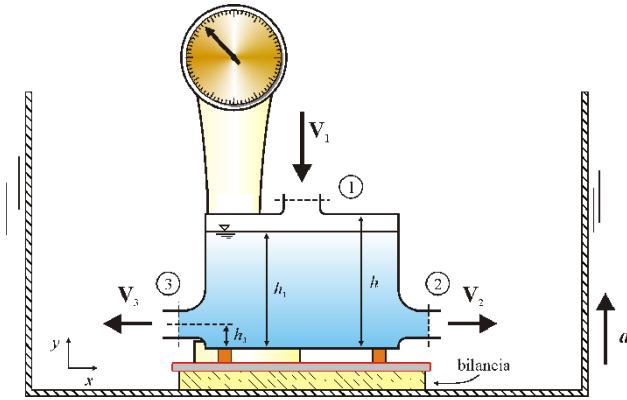


Figura 4.48. Ascensore con serbatoio su una bilancia

Soluzione

Per il volume di controllo in Figura 4.49 il bilancio della quantità di moto proiettato nella direzione y conduce alla seguente equazione:

$$G_y + \Pi_y + I_y + M_{1y} - M_{2y} = 0.$$

$G_y = -\rho g A h_1$ è la componente delle forze di massa

$\Pi_y = ?$ è l'incognita

$I_y = 0$ è l'inerzia locale

$M_{1y} = -\rho V_1^2 A_1$ è il flusso di quantità di moto in ingresso

$M_{2y} = 0$ è il flusso di quantità di moto in uscita.

La spinta totale agente sul volume di controllo è pari a:

$$\Pi_y = \rho g A h_1 + \rho V_1^2 A_1.$$

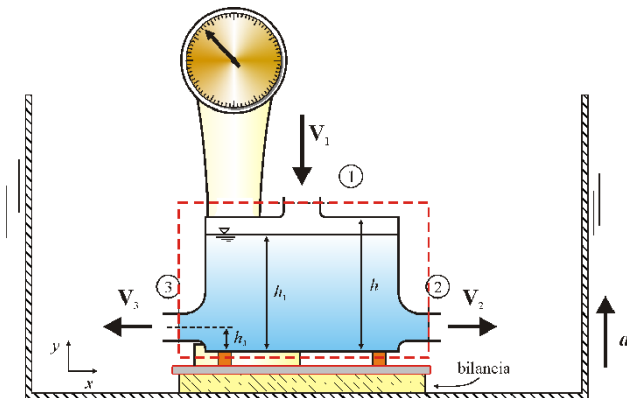


Figura 4.49. Volume di controllo per il calcolo delle azioni

La lettura sulla bilancia, comprensiva del peso del contenitore, è pari a:

$$\rho g A h_1 + \rho V_1^2 A_1 + M g =$$

$$9806 \times 0.09 \times 0.57 + 1000 \times (1.5)^2 \times 0.009 + 2.5 \times 9.806 = 549 \text{ N.}$$

Per la conservazione della massa e per la condizione di simmetria, risulta anche:

$$V_2 = V_3 = \frac{V_1 A_1}{2 A_2} = \frac{1.5 \times 0.009}{2 \times 2.22 \times 10^{-3}} = 3.04 \text{ m/s.}$$

quando la sezione 2 è ancora aperta.

La quota del baricentro della sezione 3 (coincidente con la quota del baricentro della sezione 2) misurata a partire dal fondo del contenitore, si calcola applicando il teorema di Bernoulli tra il pelo libero dell'acqua nel contenitore (dove la velocità è nulla per ipotesi) e la sezione di efflusso, quando le due luci di area A_2 e A_3 siano aperte e nell'ipotesi che le dimensioni geometriche verticali di A_2 e A_3 siano modeste rispetto al battente:

$$V_2 = V_3 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

da cui si ricava:

$$h_3 = h_1 - \frac{V_2^2}{2g} = 0.57 - \frac{(3.04)^2}{2 \times 9.806} = 0.10 \text{ m.}$$

Data la simmetria, il bilancio di quantità di moto secondo la direzione x è soddisfatto senza necessità di alcuna forza di superficie trasmessa per attrito. Il coefficiente di attrito minimo per l'equilibrio è nullo.

In presenza di accelerazione verso l'alto, scelto un volume di controllo non inerziale (identico al precedente), la velocità di efflusso attraverso le sezioni 2 e 3 diventa:

$$V_2 = V_3 = \sqrt{2(g + a)(h'_1 - h_3)}.$$

e, quindi, in regime permanente il nuovo livello del pelo libero (misurato rispetto al fondo del contenitore) diventa:

$$h'_1 = h_3 + \frac{V_2^2}{2(g + a)} = 0.10 + \frac{(3.04)^2}{2 \times (9.806 + 1)} = 0.53 \text{ m.}$$

Il coefficiente d'attrito minimo è sempre nullo, visto il bilancio di quantità di moto nella direzione x .

Se la sezione 2 è occlusa, in regime permanente tutta la portata in ingresso deve essere allontanata attraverso la sezione 3. La conservazione della massa, infatti, impone:

$$V_1 A_1 = V_3 A_3.$$

La velocità in uscita V_3 deve essere pari a:

$$V_3 = \frac{A_1 V_1}{A_3} = \frac{0.009 \times 1.5}{2.22 \times 10^{-3}} = 6.08 \text{ m/s.}$$

Il carico rispetto al baricentro della sezione di efflusso A_3 necessario per ottenere una velocità di efflusso $V_3 = 6.08$ m/s, si ottiene applicando il Teorema di Bernoulli ad una traiettoria che parte dal pelo libero nel serbatoio (dove la velocità è trascurabile) e passa per la sezione contratta del getto di efflusso (dissipazioni nulle e coefficiente di contrazione unitario per ipotesi):

$$V_3 = \sqrt{2g(h - h_3)} \rightarrow h = h_3 + \frac{V_3^2}{2g} = 0.10 + \frac{(6.08)^2}{2 \times 9.806} = 1.98 \text{ m.}$$

Il bilancio di quantità di moto proiettato nella direzione x richiede che:

$$G_x + \Pi_x + I_x + M_{1x} - M_{2x} = 0.$$

$G_x = 0$ è la componente delle forze di massa

$\Pi_x = ?$ è l'incognita

$I_x = 0$ è l'inerzia locale

$M_{1x} = 0$ è il flusso di quantità di moto in ingresso

$M_{2x} = -\rho V_3^2 A_3$ è il flusso di quantità di moto in uscita.

Quindi:

$$\Pi_x = -\rho V_3^2 A_3 = -1000 \times (6.08)^2 \times 2.22 \times 10^{-3} = -82 \text{ N.}$$

Il valore minimo del coefficiente d'attrito necessario per evitare lo slittamento del contenitore nel verso positivo dell'asse x si ottiene imponendo che:

$$\begin{aligned} |\rho V_3^2 A_3| &\leq f |\rho g h A + Mg + \rho V_1^2 A_1| \rightarrow \\ f &\geq \frac{|\rho V_3^2 A_3|}{|\rho g h A + Mg + \rho V_1^2 A_1|} = \\ &= \frac{|1000 \times (6.08)^2 \times 2.22 \times 10^{-3}|}{|1000 \times 9.806 \times 1.98 \times 0.09 + 2.5 \times 9.806 + 1000 \times (1.5)^2 \times 0.009|} = 0.046. \end{aligned}$$

Esercizio 4.29

Il getto d'acqua in Figura 4.50, di diametro $D = 20$ mm, incide sul disco circolare con velocità $V = 30$ m/s. Il disco circolare ha un foro e trasla verso sinistra con velocità $U = 10$ m/s. Il getto viene in parte deviato, in parte continua con un diametro $d = 10$ mm.

- Calcolare la forza necessaria per mantenere il disco in moto rettilineo uniforme.

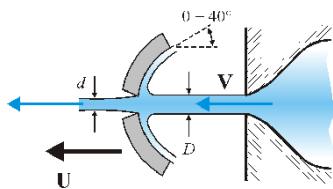


Figura 4.50. Getto d'acqua incidente su un disco circolare forato in asse

Soluzione

Scegliamo un volume di controllo nel riferimento mobile (Figura 4.51) solidale al disco. Se il disco trasla a velocità costante, il riferimento è inerziale. *Le velocità devono essere valutate nel sistema di riferimento del volume di controllo, cioè nel riferimento inerziale mobile al quale decidiamo di vincolare il sistema di coordinate x .*

L'equazione di bilancio della quantità di moto proiettata lungo l'asse x è la seguente:

$$\cancel{G_x} + \cancel{I_x} + \Pi_{0x} + \cancel{IV_{1x}} + \cancel{IV_{2x}} + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

con

$$\Pi_{0x} = -F_x.$$

F_x è l'azione esercitata dal fluido nel volume di controllo sul disco.

Se trascuriamo le dissipazioni, applicando il Teorema di Bernoulli possiamo dimostrare che la velocità della corrente deviata dal disco e che prosegue assialmente è uguale alla velocità della corrente incidente. Nel riferimento relativo mobile tale velocità è pari a $V - U$.

Il flusso di quantità di moto in ingresso è pari a:

$$M_{1x} = \rho (V - U)^2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

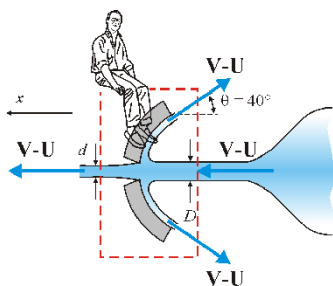


Figura 4.51. Volume di controllo mobile solidale al disco

Il flusso di quantità di moto in uscita è pari a:

$$M_{2x} = \rho (V - U)^2 \frac{\pi d^2}{4} - \rho (V - U) Q_{dev} \cos \theta$$

nel quale il primo contributo è il flusso di quantità di moto in uscita dal foro circolare assiale, il secondo contributo è il flusso di quantità di moto in uscita generato dalla deviazione della corrente da parte del disco. Q_{dev} rappresenta la portata deviata per un osservatore solidale al disco, pari alla differenza tra la portata in ingresso e la portata che fuoriesce dal foro circolare assiale:

$$Q_{dev} = (V - U) \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}.$$

Quindi, risulta:

$$M_{2x} = \rho (V - U)^2 \frac{\pi d^2}{4} - \rho (V - U)^2 \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \cos \theta.$$

La componente orizzontale di spinta esercitata dal getto sul disco è pari a:

$$F_x = M_{1x} - M_{2x} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} F_x &= \rho (V - U)^2 \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} (1 + \cos \theta) = \\ &= 1000 \times (30 - 10)^2 \times \frac{\pi \times (0.02^2 - 0.01^2)}{4} \times (1 + \cos 40^\circ) = 166 \text{ N} \end{aligned}$$

ed è diretta verso sinistra. Per garantire il moto uniforme del disco è necessario applicare una spinta uguale ed opposta.

Esercizio 4.30

Il getto in Figura 4.52 incide sul corpo di massa M . L'attrito dinamico tra il corpo ed il piano di scorrimento orizzontale è pari a $\mu_k = 0.30$. Calcolare:

- l'accelerazione del corpo quando la sua velocità è pari a $U = 10 \text{ m/s}$;
 - la velocità terminale del corpo.
- ◇ La densità di massa dell'acqua è pari a $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$.

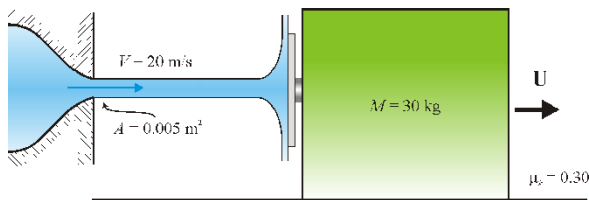


Figura 4.52. Getto incidente su un corpo mobile con attrito

Soluzione

Scelto il volume di controllo in Figura 4.53, solidale al corpo in movimento, trascurando l'inerzia locale la forza esercitata dal getto è pari al flusso di quantità di moto in ingresso:

$$F = \rho A (V - U) |V - U|.$$

Considerate tutte le forze agenti sul corpo, risulta:

$$M \frac{DU}{Dt} = \rho A (V - U) |V - U| - \mu_k M g.$$

L'accelerazione del corpo per $U = 10$ m/s è pari a:

$$\begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= \frac{\rho A}{M} (V - U) |V - U| - \mu_k g = \\ \frac{999 \times 0.005}{30} \times (20 - 10) \times |20 - 10| - 0.3 \times 9.806 &= 13.7 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

La velocità asintotica del corpo si raggiunge quando l'accelerazione è nulla, cioè:

$$U = V - \sqrt{\frac{\mu_k M g}{\rho A}} = 20 - \sqrt{\frac{0.3 \times 30 \times 9.806}{999 \times 0.005}} = 15.8 \text{ m/s}.$$

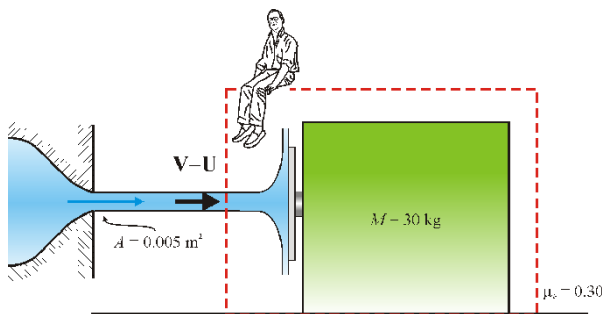


Figura 4.53. Volume di controllo mobile solidale al corpo

Esercizio 4.31

Un acquascooter si muove in acqua di mare (Figura 4.54). In assetto di viaggio la presa d'acqua è inclinata di un angolo $\alpha = (30 + C_{pu})^\circ$ rispetto all'orizzontale, e ha area della superficie $\Omega_1 = (1.5 + C_{pu}/10) \text{ dm}^2$; lo scarico, di area della superficie Ω_2 , è circolare cilindrico di diametro $d = (8 + C_{pu}/10) \text{ cm}$.

- Calcolare la portata necessaria per generare una spinta di 1300 N con velocità dell'acquascooter pari a $V_1 = 7.0 \text{ m/s}$.
 - Calcolare la potenza ceduta al getto d'acqua dal propulsore per generare tale spinta.
 - Eseguire gli stessi calcoli se lo scarico ha diametro pari a $2d$ e $\alpha = 90^\circ$.
- ◇ Si consideri il getto in uscita orizzontale.

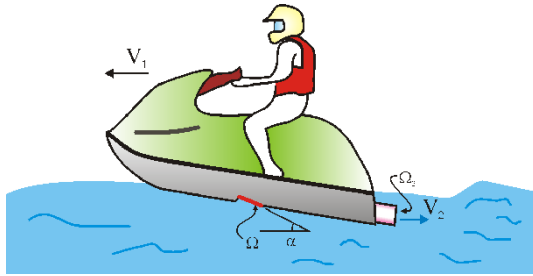


Figura 4.54. Acquascooter

Soluzione

Scelto il volume di controllo in Figura 4.55, solidale all'acquascooter, proiettiamo il bilancio di quantità di moto nella direzione orizzontale:

$$\cancel{G_x} + \cancel{\Pi_{0x}} + \cancel{\Pi_{1x}} + \cancel{\Pi_{2x}} + \cancel{I_x} + M_{1x} - M_{2x} = 0.$$

La forza esercitata sul volume di controllo è solo quella dovuta alla distribuzione di tensioni sulla superficie di contatto tra acquascooter e fluido, uguale ed opposta all'azione esercitata sull'acquascooter:

$$F_x = -\Pi_{0x} = M_{1x} - M_{2x}.$$

V_2 è la velocità del getto relativa all'acquascooter. Se la portata è pari a Q , risulta:

$$F_x = \rho Q (V_1 - V_2).$$

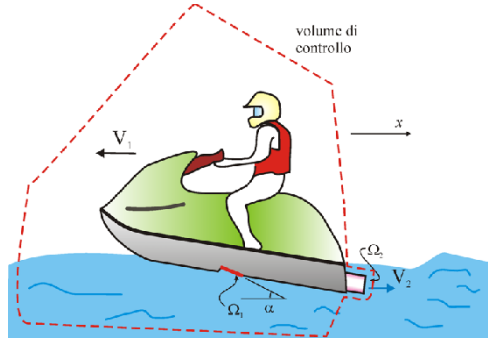


Figura 4.55. Volume di controllo per il calcolo delle azioni

Poiché risulta:

$$Q = V_2 \Omega_2$$

si calcola:

$$F_x = \rho Q V_1 - \rho \frac{Q^2}{\Omega_2}$$

diretta verso sinistra. Risolvendo rispetto alla portata, si calcola:

$$Q = \frac{V_1 \Omega_2 + \sqrt{(V_1 \Omega_2)^2 + 4 F_x \frac{\Omega_2}{\rho}}}{2}.$$

L'acqua entra nella presa con una velocità relativa pari a $V_1 \sin \alpha$. La potenza ceduta al getto dalla pompa è pari alla differenza tra la potenza cinetica della corrente in uscita e la potenza cinetica della corrente in ingresso:

$$P_g = \gamma Q \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right).$$

La potenza trasferita all'acquascooter è pari a:

$$P_a = F_x V_1 = \left(\rho \frac{Q^2}{\Omega_2} - \rho Q V_1 \right) V_1.$$

Il rendimento è pari a:

$$\eta = \frac{P_a}{P_g} = \frac{\left(\rho \frac{Q^2}{\Omega_2} - \rho Q V_1 \right) V_1}{\gamma Q \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)} = \frac{2 (V_2 - V_1) V_1}{(V_2 - V_1 \sin \alpha) (V_2 + V_1 \sin \alpha)}.$$

Se l'asse della presa è ortogonale alla direzione del moto ($\alpha = 0$) risulta:

$$\eta = \frac{2 (V_2 - V_1) V_1}{V_2^2}$$

che assume valore massimo, pari al 50%, per $V_2 = 2V_1$.

Se l'asse della presa è parallelo alla direzione del moto ($\alpha = 90^\circ$) risulta:

$$\eta = \frac{2V_1}{V_2 + V_1}$$

che assume valore teorico massimo pari al 100% per $V_2 = V_1$. Tuttavia, tale valore è privo di significato poiché corrisponderebbe ad una spinta nulla.

Se $V_2 = 2V_1$ per $\alpha = 90^\circ$ il rendimento è pari al 66%, valore maggiore di quello massimo calcolato per $\alpha = 0$.

Raddoppiando il diametro dello scarico, l'area della sua sezione trasversale quadruplica e si calcola una portata pari a:

$$Q' = \frac{V_1 \Omega'_2 + \sqrt{(V_1 \Omega'_2)^2 + 4F_x \frac{\Omega'_2}{\rho}}}{2} = \frac{4V_1 \Omega_2 + \sqrt{(4V_1 \Omega_2)^2 + 16F_x \frac{\Omega_2}{\rho}}}{2} > Q$$

dato che $\Omega'_2 = \frac{4\pi d^2}{4} = 4\Omega_2$.

Il rendimento è pari a:

$$\eta' = \frac{P_a}{P'_g} = \frac{\left(\rho \frac{Q'^2}{\Omega'_2} - \rho Q' V_1 \right) V_1}{\gamma Q' \left(\frac{V_2'^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right)} = \frac{2V_1}{(V_2' + V_1)}.$$

Il rendimento è crescente con la riduzione della velocità V_2' . Quindi, aumentando il diametro dello scarico si incrementa il rendimento. Al limite, se la girante della pompa viene sostituita da un'elica in acqua (soluzione tradizionale), si raggiunge il massimo rendimento. La soluzione con getto intubato viene utilizzata frequentemente per navigazione in acque basse, per proteggere l'elica dall'urto contro possibili ostacoli, oppure negli acquascooter per garantire la sicurezza del guidatore in caso di caduta in acqua.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$d = 8 \text{ cm}, \Omega_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (8 \times 10^{-2})^2}{4} = 5.0265 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \alpha = 30^\circ$$

$$Q = \frac{V_1 \Omega_2 + \sqrt{(V_1 \Omega_2)^2 + 4F_x \frac{\Omega_2}{\rho}}}{2}$$

$$= \frac{7.0 \times 5.0265 \times 10^{-3} + \sqrt{(7.0 \times 5.0265 \times 10^{-3})^2 + 4 \times 1300 \times \frac{5.0265 \times 10^{-3}}{1000}}}{2} \\ = 0.100 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{\Omega_2} = \frac{0.100}{5.0265 \times 10^{-3}} = 19.89 \text{ m/s}$$

$$P_g = \gamma Q \left(\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right) =$$

$$9806 \times 0.100 \times \left(\frac{19.89^2}{2 \times 9.806} - \frac{7.0^2 \times \sin^2 30^\circ}{2 \times 9.806} \right) = 19.2 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{2(V_2 - V_1)V_1}{(V_2 - V_1 \sin \alpha)(V_2 + V_1 \sin \alpha)} =$$

$$\frac{2 \times (19.89 - 7.0) \times 7.0}{(19.89 - 7.0 \times \sin 30^\circ) \times (19.89 + 7.0 \times \sin 30^\circ)} = 47.1\%$$

$$d' = 2d = 16 \text{ cm}, \Omega'_2 = \frac{\pi d'^2}{4} = \frac{\pi \times (16 \times 10^{-2})^2}{4} = 20.106 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \alpha = 90^\circ$$

$$Q' = \frac{V_1 \Omega'_2 + \sqrt{(V_1 \Omega'_2)^2 + 4F_x \frac{\Omega'_2}{\rho}}}{2}$$

$$= \frac{7.0 \times 20.106 \times 10^{-3} + \sqrt{(7.0 \times 20.106 \times 10^{-3})^2 + 4 \times 1300 \times \frac{20.106 \times 10^{-3}}{1000}}}{2}$$

$$= 0.247 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V'_2 = \frac{Q'}{\Omega'_2} = \frac{0.247}{20.106 \times 10^{-3}} = 12.27 \text{ m/s}$$

$$P'_g = \gamma Q' \left(\frac{V_2'^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

$$= 9806 \times 0.247 \times \left(\frac{12.27^2}{2 \times 9.806} - \frac{7.0^2}{2 \times 9.806} \right)$$

$$= 12.5 \text{ kW}$$

$$\eta' = \frac{2V_1}{(V'_2 + V_1)} = \frac{2 \times 7.0}{(12.27 + 7.0)} = 72.7\%.$$

Sistemi di condotte

Esercizio 5.1

Il sifone in Figura 5.1, di diametro $d = (0.2 + C_{pu}/100)$ m e con una strozzatura, è sostenuto da un galleggiante e scarica acqua con una portata $Q = (0.06 + C_u/100)$ m³/s. L'area della sezione trasversale del serbatoio è pari a $A = 10$ m². Calcolare:

- il coefficiente ξ delle perdite di carico della strozzatura trascurando le perdite distribuite;
 - la pressione nel vertice A;
 - il tempo necessario per un abbassamento di livello nel serbatoio pari a 0.20 m.
- ◇ Si assuma un coefficiente di perdita di carico all'imbocco pari a $\xi_{imb} = 1.16$. Dati numerici: $H = 2.0$ m, $h = 1.5$ m.

Soluzione

Il bilancio di energia lungo la traiettoria tra il punto C e la sezione di efflusso B, trascurando le perdite di carico distribuite, porta alla seguente relazione:

$$z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \xi_{sbocco} \frac{V_B^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_B^2}{2g} + \xi \frac{V_B^2}{2g} \rightarrow$$

$$z_C - z_B \equiv h = \xi_{sbocco} \frac{V_B^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_B^2}{2g} + \xi \frac{V_B^2}{2g}$$

dalla quale si calcola:

$$\xi = \frac{2gh}{V_B^2} - \xi_{imb} - \xi_{sbocco}.$$

Abbiamo trascurato le perdite concentrate nella curva.

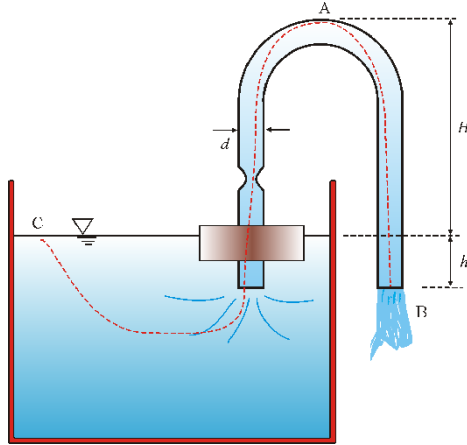


Figura 5.1. Schema del sifone su galleggiante

La velocità media della corrente è pari a $V \equiv V_B = \frac{4Q}{\pi d^2}$.

Applicando il bilancio di energia tra il punto C e il vertice A risulta:

$$z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} - (\xi + \xi_{imb}) \frac{V^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

e, quindi:

$$p_A = -\gamma \left[z_A - z_C + (\xi + 1 + \xi_{imb}) \frac{V^2}{2g} \right] \equiv -\gamma (H + h).$$

Poiché il carico disponibile h è costante, la portata è costante e il tempo necessario per l'abbassamento del pelo libero nel serbatoio di un valore δ è pari al rapporto tra il volume d'acqua corrispondente e la portata:

$$\Delta t = \frac{A\delta}{Q}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$d = 0.2$ m, $Q = 0.06$ m³/s, $A = 10$ m², $H = 2.0$ m, $h = 1.5$ m, $\delta = 0.20$ m

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.06}{\pi \times 0.2^2} = 1.91 \text{ m/s}$$

$$\xi = \frac{2gh}{V_B^2} - \xi_{imb} - \xi_{sbocco} = \frac{2 \times 9.806 \times 1.5}{1.91^2} - 2.16 = 5.90$$

$$p_A = -\gamma (H + h) = -9806 \times (2 + 1.5) = -34.3 \text{ kPa}$$

$$\Delta t = \frac{A\delta}{Q} = \frac{10 \times 0.2}{0.06} = 33.3 \text{ s.}$$

Esercizio 5.2

Il sifone in Figura 5.2 è una condotta di diametro $D = 0.4$ m con scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.4$ mm.

- Determinare la portata.
 - Tracciare la linea dei carichi totali e la piezometrica.
- ◇ Si assuma un coefficiente di perdita nel gomito pari a 0.3. Il fluido è acqua.

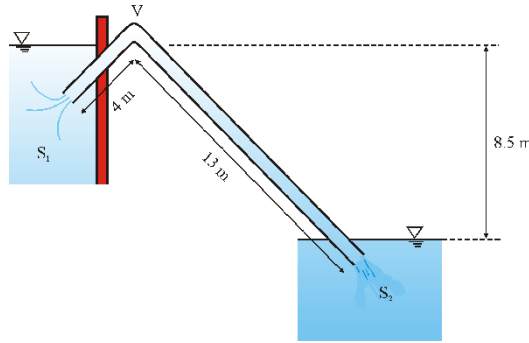


Figura 5.2. Sifone tra due serbatoi

Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia tra i due serbatoi si scrive come segue:

$$H = \xi_{imb} \frac{V^2}{2g} + \xi_g \frac{V^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_1 + L_2}{D}.$$

ξ_{imb} , ξ_g , e ξ_{sbocco} sono i coefficienti di perdita di carico concentrata all'imbocco, nel gomito e allo sbocco. $H = 8.5$ m è il dislivello.

Invertendo, risulta:

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{\xi_{imb} + \xi_g + \xi_{sbocco} + \lambda \frac{L_1 + L_2}{D}}}.$$

Per il calcolo delle perdite di carico distribuite, assumiamo un valore dell'indice di resistenza pari al valore asintotico per turbolenza pienamente sviluppata. Il valore asintotico dell'indice di resistenza corrispondente ad una scabrezza relativa $\varepsilon/D = 0.001$ è pari a $\lambda_\infty = 0.0195$.

Sostituendo, risulta:

$$V = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 8.5}{1 + 0.3 + 1 + 0.0195 \times \frac{4 + 13}{0.4}}} = 7.30 \text{ m/s.}$$

Il numero di Reynolds corrispondente è pari a:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{7.30 \times 0.4}{10^{-6}} = 2.92 \times 10^6.$$

ν è la viscosità cinematica dell'acqua, assunta pari a $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Dall'abaco di Moody risulta che il punto di funzionamento della condotta è in condizioni di moto turbolento pienamente sviluppato, con $\lambda \equiv \lambda_\infty$. Quindi, l'ipotesi di partenza per il calcolo dell'indice di resistenza è soddisfatta. La portata è pari a:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 7.30 \times \frac{\pi \times 0.4^2}{4} = 0.92 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La linea dei carichi totali e la linea piezometrica sono riportate in Figura 5.3. La pendenza delle rette a monte e a valle del gomito è la stessa se il gomito è simmetrico rispetto alla verticale.

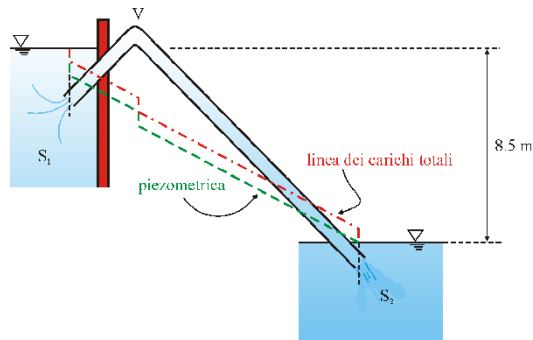


Figura 5.3. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

Esercizio 5.3

Dell'acqua fluisce attraverso il sifone in Figura 5.4. Il diametro della condotta è pari a 75 mm. Calcolare:

- la portata in uscita trascurando le perdite di carico distribuite e concentrate;
- il diametro del restringimento nella sezione A se i due manometri in A e in B misurano la stessa pressione, trascurando le perdite di carico distribuite e concentrate.

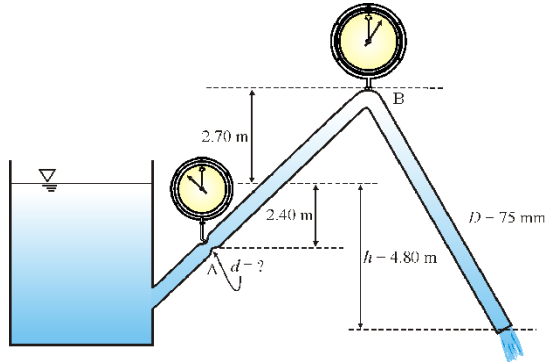


Figura 5.4. Sifone con strozzatura

Soluzione

La velocità della corrente in uscita, in assenza di perdite di carico, è pari alla velocità torricelliana:

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.806 \times 4.8} = 9.70 \text{ m/s.}$$

La portata è pari a:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 9.70 \times \frac{\pi \times 0.075^2}{4} = 42.85 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s.}$$

Applicando il teorema di Bernoulli tra le sezioni A e B risulta:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g}$$

con $V_B = V$.

Poiché $p_A = p_B$, se $\alpha_A = \alpha_B = 1$ risulta:

$$V_A^2 = V_B^2 + 2g(z_B - z_A).$$

Dall'equazione di continuità risulta:

$$V_A \frac{\pi D_A^2}{4} = V_B \frac{\pi D_B^2}{4}$$

e, sostituendo:

$$\frac{D_B}{D_A} = \left[1 + \frac{2g(z_B - z_A)}{V_B^2} \right]^{1/4} = \left[1 + \frac{2 \times 9.806 \times (2.4 + 2.7)}{9.7^2} \right]^{1/4} = 1.20.$$

Quindi:

$$D_A = \frac{D_B}{1.20} = \frac{0.075}{1.20} = 62.5 \text{ mm.}$$

Esercizio 5.4

Due serbatoi sono collegati da una condotta in acciaio funzionante a sifone con scabrezza di Gauckler-Strickler $k = 80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ (Figura 5.5). I tronchi hanno lunghezza $L_{AB} = 8 \text{ m}$, $L_{BM} = 32 \text{ m}$, $L_{MC} = 45 \text{ m}$ e diametro $D = (200 + 10 \times C_{pu}) \text{ mm}$. La quota geodetica del livello nel serbatoio 1 è $z_1 = (11 + 0.5 \times C_u) \text{ m}$, la quota geodetica del livello nel serbatoio 2 è $z_2 = 8 \text{ m}$, e la quota del vertice M è $z_M = 19 \text{ m}$.

- Calcolare la portata.
 - Disegnare la piezometrica e la linea dei carichi totali.
 - Attraverso un opportuno sistema di controllo è possibile abbassare il livello del serbatoio di monte z_1 con una velocità pari a 0.001 m/s . Calcolare dopo quanto tempo (con z_2 costante e pari a 8 m) inizia il moto a canna scema.
 - Calcolare la portata transitante in quell'istante.
- ◇ Si assuma un coefficiente di perdita all'imbocco e allo sbocco unitario e un coefficiente di perdita per ogni deviazione pari a 0.1 . Il fluido è acqua alla temperatura di 20°C , con tensione di vapore pari a 2314 Pa .

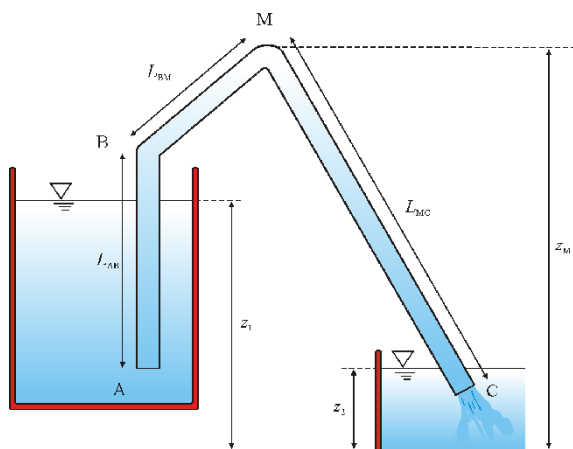


Figura 5.5. Sifone tra due serbatoi

Soluzione

Dall'equazione di bilancio dell'energia tra i due serbatoi risulta:

$$z_1 - z_2 = (L_{AB} + L_{BM} + L_{MC}) \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} +$$

$$(\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2 \times \xi_{curva}) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$$3 = (8 + 32 + 45) \times \frac{Q^2}{80^2 \times \left(\frac{0.2}{4}\right)^{4/3} \times \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)^2} +$$

$$(1.0 + 1.0 + 2 \times 0.1) \times \frac{Q^2}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)^2}$$

e, risolvendo, si calcola $Q = 0.060 \text{ m}^3/\text{s}$ corrispondente a $V = 1.91 \text{ m/s}$. L'altezza cinetica è pari a $V^2/2g = 0.18 \text{ m}$

Per verificare se la condotta funziona in pressione, è necessario calcolare per punti la piezometrica. Dal bilancio dell'energia, si calcolano i dati riportati in Tabella 5.1.

La piezometrica assoluta è a quota sempre maggiore della quota del punto più alto della condotta incrementato dell'altezza piezometrica che corrisponde alla tensione di vapore (il vertice M è a quota +19.00 m; l'incremento corrispondente

Tabella 5.1. Carichi totali e piezometrici nelle sezioni di interesse

Tronco	Perdita d'energia (m)	Sezione finale del tronco	Quota assoluta dell'energia (m)	Quota della piezometrica assoluta (m)
Serbatoio di monte	—	A	21.33	21.33
Imbocco	$1.0 \times 0.18 = 0.18$	A	21.15	20.97
AB	0.24	B	20.91	20.73
I curva	$0.1 \times 0.18 = 0.02$	B	20.89	20.71
BM	0.98	M	19.91	19.73
II curva	0.02	M	19.89	19.71
MC	1.38	C	18.51	18.33
Sbocco	$1.0 \times 0.18 = 0.18$	C	18.33	18.33

alla tensione di vapore è pari a 0.24 m) e la condotta funziona sempre a canna piena. Il sifone deve essere innescato.

Se il livello nel serbatoio di monte si abbassa, la portata si riduce poiché si riduce il carico disponibile. Il funzionamento a canna scema si instaura quando la pressione nel vertice M è pari alla tensione di vapore. Le incognite sono il livello z_1 e la portata. Le due condizioni che devono essere soddisfatte sono le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 - z_2 = (L_{AB} + L_{BM} + L_{MC}) \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} + \\ + (\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2 \times \xi_{curva}) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \\ z_1 + \frac{p_{atm}}{\gamma} - \left(z_M + \frac{p_{vap}}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \right) = \\ (L_{AB} + L_{BM}) \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} + (\xi_{imb} + \xi_{curva}) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \end{array} \right.$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione, che rappresenta anche il bilancio di energia tra il vertice M e il serbatoio 2 se nel vertice la pressione assoluta è pari alla tensione di vapore:

$$\left(z_M + \frac{p_{vap}}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \right) - z_2 - \frac{p_{atm}}{\gamma} = L_{MC} \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} + (\xi_{sbocco} + \xi_{curva}) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}.$$

Introducendo i valori numerici, risulta:

$$19 + 0.24 + \frac{Q^2}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)^2} - 8 - 10.33 = 45 \times \frac{Q^2}{80^2 \times \left(\frac{0.2}{4}\right)^{4/3} \times \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)^2} + (1.0 + 0.1) \times \frac{Q^2}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 0.2^2}{4}\right)^2}$$

e, risolvendo, si ricava $Q = 0.048 \text{ m}^3/\text{s}$, con $V = 1.53 \text{ m/s}$ e $z_1 = 9.94 \text{ m}$.

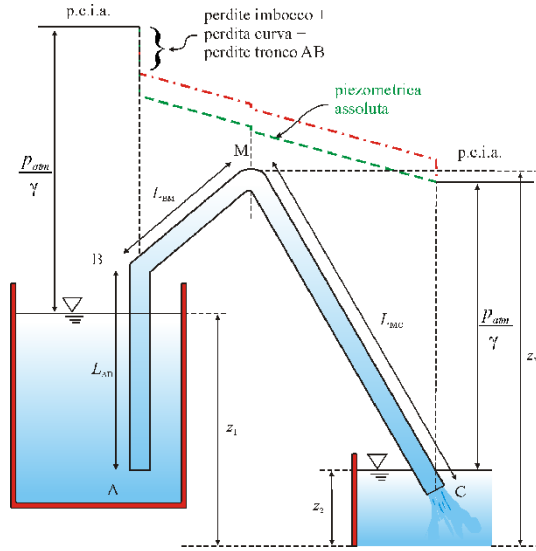


Figura 5.6. Andamento della piezometria assoluta e della linea dei carichi totali

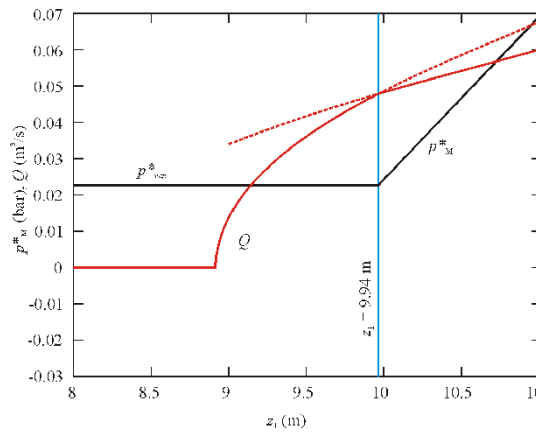


Figura 5.7. Scala di deflusso e diagramma della pressione assoluta nel vertice del sifone

L'abbassamento del livello del serbatoio di monte dal livello iniziale al nuovo livello, avviene in un intervallo di tempo pari a $(11 - 9.94)/0.001 = 1060$ s.

Si noti che la piezometria assoluta e la linea dei carichi totali riportate in Figura 5.6, sono distorte. In Figura 5.7 è riportato il diagramma della portata e della pressione assoluta nel vertice M in funzione del livello del serbatoio di monte.

Esercizio 5.5

Nel sistema in Figura 5.8 la condotta è in acciaio di diametro $D = (200 + C_{pu} \times 10)$ mm e scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.2$ mm. La portata d'acqua è pari a $Q = (0.10 + C_u/100)$ m³/s con $h = (100 + C_u \times 10)$ m. I tronchi hanno lunghezza $L_1 = (500 + C_u \times 10)$ m, $L_2 = 150$ m, $L_3 = (200 + C_{pu} \times 10)$ m.

- Calcolare la pressione assoluta p^* necessaria per garantire il moto del fluido.
 - Calcolare la pressione assoluta p^* necessaria per garantire l'efflusso incipiente, con portata tendente a zero.
 - Disegnare la linea dei carichi piezometrici assoluti.
- ◇ Trascurare l'altezza cinetica e le perdite di carico concentrate. Il fluido è acqua.

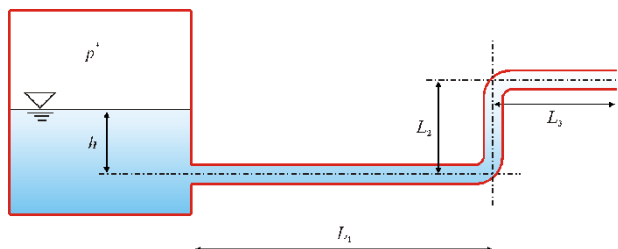


Figura 5.8. Serbatoio pressurizzato

Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia, per il sistema riportato in Figura 5.8, è la seguente:

$$h + \frac{p^*}{\gamma} - L_2 - \frac{p_{atm}}{\gamma} - \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} \frac{1}{D} (L_1 + L_2 + L_3) + \sum \xi_i \frac{V^2}{2g}$$

La velocità media in condotta è pari a $V = \frac{4Q}{\pi D^2}$, il numero di Reynolds è pari a $Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$ e la scabrezza relativa è pari a ε/D . Dal diagramma di Moody si ricava λ e, trascurando le perdite di carico concentrate, si calcola:

$$p^* = p_{atm} + \gamma \left[L_2 - h + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{1}{D} (L_1 + L_2 + L_3) \right]$$

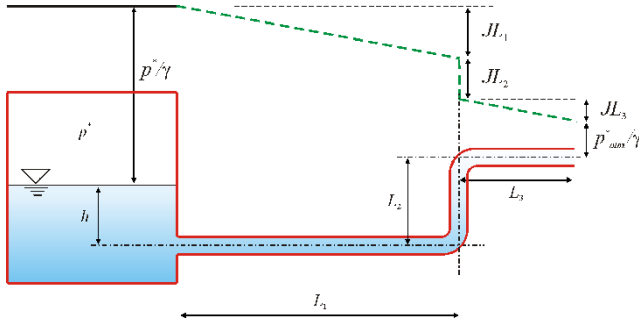


Figura 5.9. Linea dei carichi piezometrici assoluti

dove con p^* si indica il valore della pressione assoluta dell'aria nel serbatoio a monte.

Se $Q \rightarrow 0$ l'equazione di bilancio dell'energia, trascurando la dimensione finita della condotta, si riduce alla seguente equazione:

$$p^* = p_{atm}^* + \gamma (L_2 - h).$$

La linea dei carichi piezometrici assoluti è visualizzata a tratteggio in Figura 5.9.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$D = 200$ mm, $\varepsilon = 0.2$ mm, $Q = 0.10$ m³/s, $h = 100$ m, $L_1 = 500$ m, $L_2 = 150$ m, $L_3 = 200$ m

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.10}{\pi \times 0.2^2} = 3.18 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{3.18 \times 0.2}{10^{-6}} = 636 \text{ 000}.$$

Per $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.2}{200} = 10^{-3}$ si ricava $\lambda = 0.02$

$$\begin{aligned} p^* &= p_{atm}^* + \gamma \left[L_2 - h + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{1}{D} (L_1 + L_2 + L_3) \right] \\ &= 10^5 + 9806 \times \left[150 - 100 + 0.02 \times \frac{3.18^2}{2 \times 9.806} \times \frac{1}{0.2} \times (500 + 150 + 200) \right] \\ &= 10.2 \text{ bar.} \end{aligned}$$

Per efflusso incipiente, si calcola:

$$p^* = p_{atm}^* + \gamma (L_2 - h) = 10^5 + 9806 \times (150 - 100) = 5.9 \text{ bar.}$$

Esercizio 5.6

L'impianto in Figura 5.10 (disegno non in scala) convoglia acqua dal serbatoio A al serbatoio B attraverso una condotta esistente di forma circolare in acciaio di diametro $D = 200$ mm, lunghezza $L = (300.00 + 10 \times C_{pu})$ m, scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.2$ mm e con un dislivello motore pari a $Y = (30.00 + C_u/10)$ m.

- Determinare il valore della portata Q_1 transitante.

Allo scopo di aumentare la portata transitante al valore $Q_2 = 1.5 \times Q_1$ si stabilisce di sostituire la tubazione esistente con una nuova in materiale che, ai fini del flusso idrico, può considerarsi con pareti lisce, mantenendo invariate le caratteristiche del collegamento tra i due serbatoi.

- Determinare il diametro da assegnare alla tubazione scegliendo nella serie commerciale riportata di seguito:

$D(\text{mm}) = 40, 50, 65, 80, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000$

◇ Si assuma $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 1.0$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

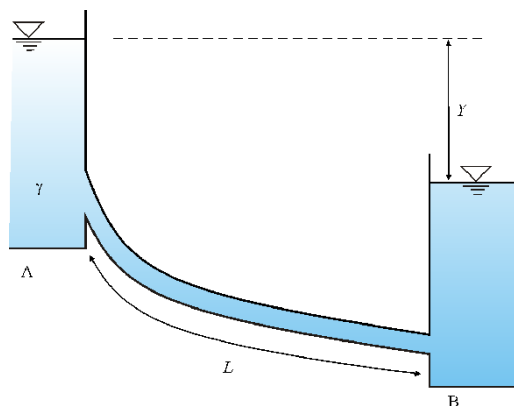


Figura 5.10. Condotta tra due serbatoi

Soluzione

Il bilancio di energia dell'impianto è il seguente:

$$Y = \frac{Q_1^2}{2g\Omega_1^2} \left[\lambda_1 \frac{L}{D_1} + (\xi_{imb} + \xi_{sbocco}) \right]$$

con $\Omega_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$. La portata è pari a:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2g\Omega_1^2 Y}{\lambda_1 \frac{L}{D_1} + (\xi_{imb} + \xi_{sbocco})}}.$$

Per tentativi, utilizzando l'abaco di Moody, si calcola il coefficiente di resistenza e la portata. I tentativi si possono organizzare nella maniera di seguito esposta.

Si ipotizza inizialmente che il moto sia puramente turbolento. Il valore di λ_1 , in tal caso, è quello asintotico per $Re \rightarrow \infty$, comunemente indicato come λ_∞ , e che dipende solo dal valore di scabrezza relativa ε/D_1 :

$$\lambda_\infty = \left[-2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D_1} \right) \right]^{-2}.$$

Si calcola, quindi, un valore Q'_1 di primo tentativo della portata transitante:

$$Q'_1 = \sqrt{\frac{2g\Omega_1^2 Y}{\lambda_\infty \frac{L}{D_1} + (\xi_{imb} + \xi_{sbocco})}}.$$

Noto Q'_1 si calcola il numero di Reynolds di primo tentativo:

$$Re' = \frac{V'_1 D_1}{\nu} = \frac{Q'_1 D_1}{\frac{\pi D_1^2}{4} \nu}.$$

In base ai valori di scabrezza relativa ε/D_1 e Re' si controlla sull'abaco di Moody se il valore di λ è uguale a quello ipotizzato. Nella prima iterazione, questo corrisponde a ricercare la conferma che il moto sia puramente turbolento. Se la condizione risulta verificata, la portata di primo tentativo è corretta, si può assumere come valore definitivo di Q_1 e, quindi, si può procedere a risolvere la seconda parte dell'esercizio.

In caso contrario occorre valutare il nuovo valore λ'_1 leggendo l'abaco di Moody o risolvendo iterativamente la relazione di Colebrook:

$$\lambda'_1 = \left[-2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re' \sqrt{\lambda'_1}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D_1} \right) \right]^{-2}.$$

Ottenuto il valore aggiornato di λ'_1 , si ricalcola la portata transitante ottenendo il nuovo valore:

$$Q''_1 = \sqrt{\frac{2g\Omega_1^2 Y}{\lambda'_1 \frac{L}{D_1} + (\xi_{imb} + \xi_{sbocco})}}.$$

Se i due valori successivi Q_1' e Q_1'' differiscono di una quantità inferiore ad una ragionevole tolleranza (in questo caso 10^{-4} m³/s può essere sufficiente) si può arrestare il processo iterativo adottando il valore finale Q_1'' . In caso contrario occorre procedere a una nuova iterazione ripetendo il procedimento.

Per il transito di una portata $Q_2 = 1.5 \times Q_1$ si utilizza una condotta idraulicamente liscia, per la quale il coefficiente di resistenza si può esprimere con la legge di Blasius:

$$\lambda = 0.3164 \operatorname{Re}^{-0.25} \quad \text{per } \operatorname{Re} < 10^5$$

o con la legge di Nikuradse:

$$\lambda = 0.0032 + 0.221 \operatorname{Re}^{-0.237} \quad \text{per } \operatorname{Re} \geq 10^5$$

oppure con la legge di Prandtl-Kármán:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Ipotizzando che sia valida la legge di Blasius, sostituendo nell'equazione di bilancio, risulta:

$$Y = 0.3164 \frac{(1.5Q_1)^2}{2g \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right)^2} \frac{(1.5Q_1 D_2)^{-0.25}}{\left(\frac{\pi D_2^2}{4} \nu \right)^{-0.25}} \frac{L}{D_2} + \frac{(1.5Q_1)^2}{2g \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right)^2} (\xi_{imb} + \xi_{sbocco}).$$

Trascurando in prima approssimazione le perdite di carico concentrate e invertendo l'equazione precedente rispetto al diametro, risulta:

$$D_2 = \frac{0.860872 L^{4/19} Q_1^{7/19} \nu^{1/19}}{g^{4/19} Y^{4/19}}.$$

In alternativa (e se le perdite di carico concentrate non sono trascurabili) può utilizzarsi una modalità più empirica di seguito esposta.

- a) Si calcola un valore di primo tentativo ipotizzando una velocità della corrente pari a 1.0 m/s, valore comunemente accettato per un buon funzionamento degli impianti.

Risulta, quindi, applicando la definizione di velocità media $V = Q/\Omega$, un diametro teorico pari a:

$$D_{teorico} = \sqrt{\frac{4Q_2}{\pi \times 1.0}}.$$

Si sceglie, quindi, una tubazione della serie commerciale indicata con diametro immediatamente superiore a $D_{teorico}$ e pari, ad esempio, a D'_2 .

- b) Si calcola il valore delle perdite di carico corrispondenti al passaggio della portata Q_2 nella tubazione di diametro D'_2 :

$$\Delta H_p = L \frac{\lambda V'^2}{2g D'_2} + \frac{V'^2}{2g} (\xi_{imb} + \xi_{sbocco}) \quad \text{con } V' = \frac{Q_2}{\frac{\pi (D'_2)^2}{4}}.$$

Se $\Delta H_p > Y$ si deduce che il diametro D'_2 è troppo piccolo e si prova ad adottare il diametro della serie commerciale immediatamente superiore. Si deve poi verificare ancora che le perdite di carico non siano eccessive tornando al procedimento indicato nel punto b).

Se $\Delta H_p \ll Y$ si passa al diametro commerciale immediatamente inferiore verificando anche in questo caso che le perdite di carico non siano eccessive (procedimento indicato nel punto b).

Il procedimento si arresta quando risulta $\Delta H_p \leq Y$, avendo quindi scelto un diametro sufficiente dal punto di vista idraulico e conveniente dal punto di vista economico.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$L = 300.00$ m, $Y = 30.00$ m, $\varepsilon = 0.2$ mm, $D_1 = 200$ mm. Ipotizzando un moto puramente turbolento si calcola, per $\varepsilon/D = 0.001$, $\lambda_1 = 0.020$, $Q_1 = 0.136$ m³/s e $Re = 865\,000$.

Per incrementare la portata del 50%, se la condotta è liscia, applicando la legge di Prandtl-Kármán si calcola un diametro teorico pari a $D_2 = 0.211$ m, con $\lambda_1 = 0.011$. Si sceglierà il diametro commerciale di 250 mm ma sarà necessario installare una valvola di strozzamento per dissipare circa 16.5 m di carico in eccesso.

Esercizio 5.7

Nell'impianto in Figura 5.11 la condotta di collegamento ha lunghezza $L = (4000 + 100 \times C_u)$ m, diametro $D = (200 + 10 \times C_{pu})$ mm, scabrezza di Gauckler-Strickler pari a $k = 90$ m^{1/3}/s. Sulla condotta è montato un Venturimetro. L'indicazione del manometro differenziale è pari a $\Delta p = (0.05 + 0.005 \times C_u)$ bar e il coefficiente di velocità del Venturimetro è pari a $C_v = 0.981$. Il diametro della sezione ristretta è $d = (150 + 5 \times C_{pu})$ mm, il diametro della sezione d'ingresso è coincidente con il diametro corrente della condotta.

- Calcolare la portata di moto permanente.
 - Calcolare il livello del serbatoio a monte.
 - Disegnare la piezometrica e la linea dei carichi totali.
- ◇ Il fluido è acqua. Trascurare le perdite di carico concentrate. Trascurare la variazione di quota geodetica tra le prese del manometro differenziale.

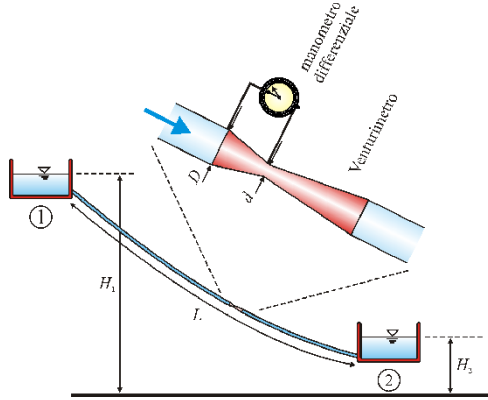


Figura 5.11. Condotta tra due serbatoi con Venturimetro

Soluzione

La portata misurata dal Venturimetro è pari a:

$$Q = C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{\frac{2g\Delta p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}.$$

Si noti che la variazione di carico piezometrico Δh tra le due sezioni non risente delle variazioni di quota geodetica se il manometro differenziale è a porte bagnate. Il dislivello tra il serbatoio di monte e il serbatoio di valle deve bilanciare le sole perdite di carico distribuite (per ipotesi, sono trascurabili le perdite di carico concentrate), ed è pari a:

$$\Delta H = JL = \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} L.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$L = 4000$ m, $D = 200$ mm, $\Delta p = 0.05$ bar, $d = 150$ mm.

$$Q = C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{\frac{2g\Delta p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = 0.981 \times \frac{\pi \times 0.150^2}{4} \times \sqrt{\frac{\frac{2 \times 9.806 \times 0.05 \times 10^5}{9806}}{1 - \left(\frac{0.150}{0.200}\right)^4}} = 66.3 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

La velocità media in condotta è pari a 2.11 m/s.

Il dislivello tra i due serbatoi è pari a:

$$\Delta H = \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 L} = \frac{(66.3 \times 10^{-3})^2}{90^2 \times \left(\frac{0.200}{4}\right)^{4/3} \times \left(\frac{\pi \times 0.200^2}{4}\right)^2} \times 4000 = 119.4 \text{ m.}$$

Esercizio 5.8

Nell'impianto in Figura 5.12 la quota del pelo libero dei tre serbatoi è pari a $H_1 = (150 + 10 \times C_u)$ m, $H_2 = (100 + 5 \times C_u)$ m, $H_3 = (70 + 10 \times C_u)$ m. Le condotte di collegamento hanno lunghezza $L_1 = L_2 = (4000 + 100 \times C_u)$ m e $L_3 = (1000 + 80 \times C_u)$ m, diametro $D_1 = D_2 = D_3 = D = (150 + 10 \times C_{pu})$ mm e scabrezza di Gauckler-Strickler pari a $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Il nodo N è a quota $z_N = 85$ m. Calcolare:

- la portata nei tre tronchi;
 - la pressione relativa nel nodo N.
- ◇ Il fluido è acqua. L'impianto soddisfa le condizioni per le quali sono trascurabili le perdite di carico concentrate e le altezze cinetiche.

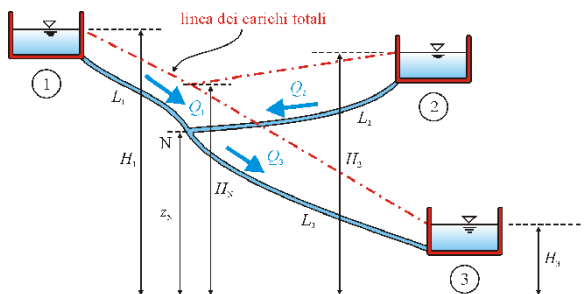


Figura 5.12. Sistema di condotte colleganti tre serbatoi a pelo libero

Soluzione

Assunto positivo il verso delle portate riportato in Figura 5.12, è possibile scrivere le seguenti equazioni di bilancio dell'energia e l'equazione di continuità nel nodo N:

$$\begin{cases} H_1 - H_3 = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} L_1 + \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} L_3 \\ H_2 - H_3 = \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2 + \beta_3 \frac{Q_3^2}{D_3^5} L_3 \\ Q_3 = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

con $\beta = \frac{4^3}{k^2 \pi^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{1/3}}$. Si noti che l'equazione di bilancio dell'energia tra il serbatoio 1 e il serbatoio 2:

$$H_1 - H_2 = \beta_1 \frac{Q_1^2}{D_1^5} L_1 - \beta_2 \frac{Q_2^2}{D_2^5} L_2$$

si ottiene combinando le prime due equazioni (tenendo conto del verso delle portate) ed è, quindi, sovrabbondante.

Dalla prima equazione si calcola:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_1 - H_3 - L_3 \beta_3 Q_3^2 / D_3^5}{L_1 \beta_1 / D_1^5}}.$$

Dalla seconda equazione si calcola:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{H_2 - H_3 - L_3 \beta_3 Q_3^2 / D_3^5}{L_2 \beta_2 / D_2^5}}.$$

Sostituendo nella terza equazione, risulta:

$$Q_3 = \sqrt{\frac{H_1 - H_3 - L_3 \beta_3 Q_3^2 / D_3^5}{L_1 \beta_1 / D_1^5}} + \sqrt{\frac{H_2 - H_3 - L_3 \beta_3 Q_3^2 / D_3^5}{L_2 \beta_2 / D_2^5}}.$$

Quest'ultima equazione presenta la sola incognita Q_3 e può essere risolta per tentativi. Si tenga presente che se il verso della portata Q_2 è differente da quello ipotizzato in Figura 5.12, la soluzione è immaginaria e, quindi, occorre riscrivere il sistema adeguando le equazioni conseguentemente.

Risolto il sistema di equazioni, la pressione nel nodo N risulta:

$$p_N = \gamma (H_1 - L_1 \beta_1 Q_1^2 / D_1^5 - z_N).$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta = 0.00239$, $H_N = 94.4$ m, $Q_1 = 21$ l/s, $Q_2 = 7$ l/s, $Q_3 = 28$ l/s, $p_N = 0.93$ bar.

Esercizio 5.9

Nell'impianto in Figura 5.13 il dislivello tra i due serbatoi A e B è pari a $\Delta H = (130 + 10 \times C_{pu})$ m. La condotta ha diametro $D = 150$ mm e lunghezza $L = (8700 + 100 \times C_u)$ m. La scabrezza di Gauckler-Strickler è pari a $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Calcolare:

- la portata;
 - la portata se si raddoppia la condotta solo per il 50% della lunghezza (condotta tratteggiata in Figura 5.13). Il raddoppio ha diametro e scabrezza identici a quelli della condotta originaria.
- ◇ Suggerimenti: l'impianto soddisfa le condizioni per le quali sono trascurabili le perdite di carico concentrate e l'altezza cinetica.

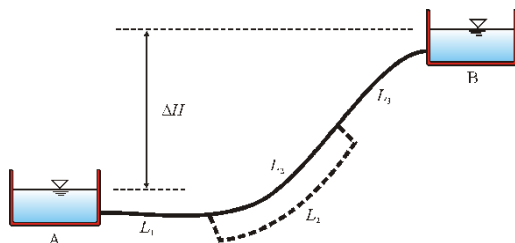


Figura 5.13. Condotta tra due serbatoi, con bypass

Soluzione

La cadente disponibile è pari a:

$$J = \Delta H / L$$

e la portata, nel caso di condotta semplice e trascurando le perdite di carico concentrate, è pari a:

$$Q = k R^{1/6} \Omega \sqrt{R J} = k \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \sqrt{\Delta H / L}.$$

Nel caso di un raddoppio, con condotta identica alla condotta originaria, per simmetria la portata in ognuno dei due tronchi assume lo stesso valore, ed è pari al 50% della portata che fluisce da un serbatoio all'altro.

Indicando con L_1 la lunghezza del primo tronco, $L_2 = L/2$ la lunghezza del raddoppio, L_3 la lunghezza del secondo tronco, l'equazione di bilancio dell'energia

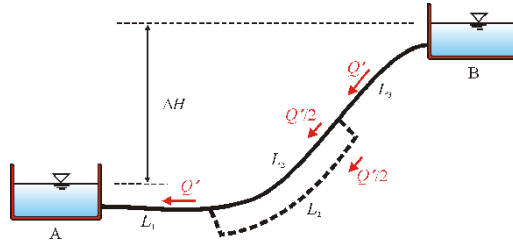


Figura 5.14. Schema di calcolo della portata

è la seguente:

$$\Delta H = \frac{Q'^2}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\pi \frac{D^2}{4}\right)^2} (L_1 + L_3) + \frac{Q'^2}{4k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\pi \frac{D^2}{4}\right)^2} L_2.$$

Inoltre, risulta $L_1 + L_3 = L_2 = L/2$.

Invertendo, si ottiene Q' . Il risultato è indipendente dalla posizione geometrica del tronco di raddoppio.

La portata Q' calcolata con un raddoppio per il 50% della lunghezza è maggiore della portata trasferita dalla condotta singola, ed è pari a:

$$Q' = Q \sqrt{\frac{8}{5}}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta:

$$\Delta H = 130 \text{ m}, D = 150 \text{ mm}, L = 8700 \text{ m}, k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$$

$$Q = k \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \sqrt{\Delta H/L} =$$

$$90 \times \left(\frac{0.15}{4}\right)^{2/3} \times \left(\frac{\pi \times 0.15^2}{4}\right) \times \sqrt{130/8700} = 22 \text{ l/s}$$

$$Q' = Q \sqrt{\frac{8}{5}} = 22 \times \sqrt{\frac{8}{5}} = 27.8 \text{ l/s}.$$

Esercizio 5.10

Il dislivello tra i due serbatoi in Figura 5.15 è $H = 12 \text{ m}$.

- Calcolare la portata che fluisce nelle condotte.
- ◇ Trascurare l'altezza cinetica e le perdite di carico concentrate. Il fluido è acqua.

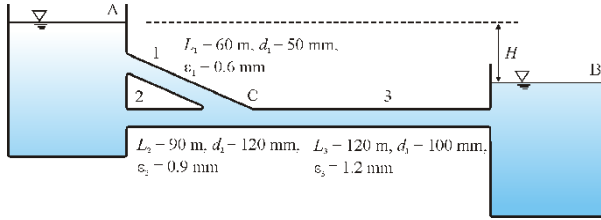


Figura 5.15. Sistema di condotte tra due serbatoi

Soluzione

Le incognite sono le tre portate nelle condotte e il carico nel nodo C. Possiamo scrivere tre equazioni di bilancio dell'energia e una di continuità:

$$\begin{cases} H_A - H_C = \lambda_1 \frac{Q_1^2}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} \\ H_A - H_C = \lambda_2 \frac{Q_2^2}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} \\ H_A - H_B = \lambda_2 \frac{Q_2^2}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \lambda_3 \frac{Q_3^2}{2g\Omega_3^2} \frac{L_3}{D_3} \\ Q_1 + Q_2 = Q_3. \end{cases}$$

Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 sono le aree delle sezioni trasversali delle condotte. Il verso delle portate è facilmente individuabile, poiché il flusso è sempre dal serbatoio con carico maggiore verso il serbatoio con carico minore. Il carico nel nodo C non può che essere intermedio tra il carico del serbatoio A e il carico del serbatoio B. Risolvendo il sistema di equazioni, si ottengono i risultati riportati in Tabella 5.2.

Tabella 5.2. Tabella riassuntiva delle caratteristiche di funzionamento delle condotte

condotta	L (m)	D (mm)	ε (mm)	Q (l/s)	V (m/s)	J (m/km)	λ (.)
1	60	50	0.6	1.76	0.89	34.04	0.042
2	90	120	0.9	13.94	1.23	22.70	0.035
3	120	100	1.2	15.70	2.00	82.97	0.041

Esercizio 5.11

Due serbatoi A e B (Figura 5.16) sono collegati da due condotte rettilinee di diametro $D = 0.10$ m, scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.1$ mm inclinate di $\pm \phi = 20^\circ$ rispetto all'orizzontale. La distanza orizzontale tra i due serbatoi è $L = 5$ m e il dislivello del pelo libero è $\Delta H = 1$ m. Il fluido ha un peso specifico $\gamma = 9$ kN/m³ e viscosità dinamica $\mu = 89 \times 10^{-2}$ Pa · s.

- Calcolare la portata nelle due condotte.
 - Disegnare la linea dei carichi piezometrici e la linea dei carichi totali.
- ◇ Suggerimenti: il coefficiente di perdita all'imbocco è nullo, poiché la condotta è ben raccordata al serbatoio di presa, il coefficiente di perdita allo sbocco è pari a 1.0 in regime turbolento, ed è pari a 2.0 in regime laminare.

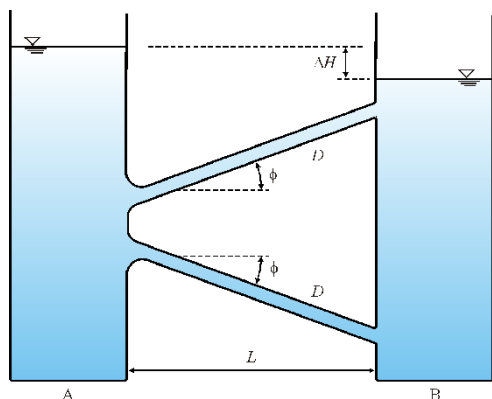


Figura 5.16. Condotte tra due serbatoi a pelo libero

Soluzione

Ipotizziamo che il moto si sviluppi in regime laminare. Il coefficiente di perdita all'imbocco è nullo, il coefficiente di perdita di carico allo sbocco è pari a 2 poiché si assume un regime di moto laminare. La lunghezza della condotta è pari a $\frac{L}{\cos \phi}$. Scrivendo il bilancio di energia risulta:

$$\Delta H = \frac{64}{\text{Re}} \frac{V^2}{2g} \frac{L}{\cos \phi} \frac{1}{D} + 2 \frac{V^2}{2g} = \frac{64\mu}{\rho V D} \frac{V^2}{2g} \frac{L}{\cos \phi} \frac{1}{D} + 2 \frac{V^2}{2g}.$$

ρ è la densità di massa del fluido, pari a γ/g . Posto $a = \frac{32\mu L}{\rho D^2 \cos \phi}$ l'equazione di bilancio si può riscrivere come segue:

$$V^2 + aV - g\Delta H = 0$$

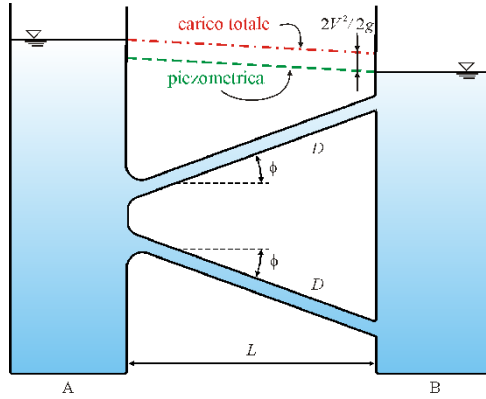


Figura 5.17. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

e ammette la seguente soluzione:

$$V = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + g\Delta H}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$a = \frac{32\mu L}{\rho D^2 \cos \phi} = \frac{32 \times 89 \times 10^{-2} \times 5}{(9000/9.806) \times 0.10^2 \times \cos 20^\circ} = 16.51 \text{ m/s}$$

$$V = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + g\Delta H} = -\frac{16.51}{2} + \sqrt{\frac{16.51^2}{4} + 9.806 \times 1.0} = 0.57 \text{ m/s}.$$

Il numero di Reynolds è pari a:

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(9000/9.806) \times 0.57 \times 0.10}{89 \times 10^{-2}} = 59 \ll 2000.$$

Il regime di moto è effettivamente laminare, secondo l'ipotesi di partenza.

La portata è la stessa per le due condotte e in totale è pari a:

$$Q = 2V \frac{\pi D^2}{4} = 2 \times 0.57 \times \frac{\pi \times 0.10^2}{4} = 8.95 \text{ l/s}.$$

Le linee dei carichi piezometrici e dei carichi totali, riportate in Figura 5.17, sono le stesse per le due condotte.

Esercizio 5.12

Le condotte in acciaio in Figura 5.18 collegano i tre serbatoi a livello d'acqua costante. Le condotte hanno scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.3$ mm.

- Calcolare la portata nelle tre condotte e il carico totale nel nodo N.
- ◇ Dati geometrici: $L_{AN} = 1500$ m, $L_{CN} = 3000$ m, $L_{BN} = 700$ m, $D_{AN} = 1000$ mm, $D_{CN} = 800$ mm, $D_{BN} = 500$ mm. Trascurare le perdite di carico concentrate.

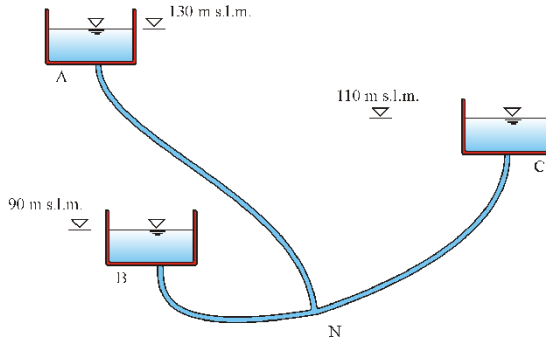


Figura 5.18. Sistema di condotte colleganti tre serbatoi a pelo libero

Soluzione

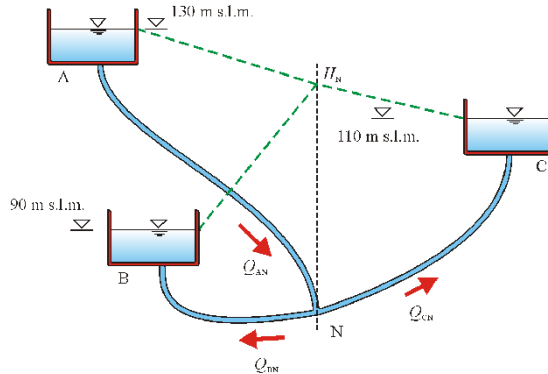
Le incognite sono le tre portate nelle condotte e il carico nel nodo N. È possibile scrivere una equazione di continuità per il nodo N e tre equazioni di bilancio dell'energia:

$$\begin{cases} Q_{AN} - Q_{BN} - Q_{CN} = 0 \\ H_A - H_N = \lambda_{AN} \frac{Q_{AN} |Q_{AN}|}{2g\Omega_{AN}^2} \frac{L_{AN}}{D_{AN}} \\ H_B - H_N = -\lambda_{BN} \frac{Q_{BN} |Q_{BN}|}{2g\Omega_{BN}^2} \frac{L_{BN}}{D_{BN}} \\ H_C - H_N = -\lambda_{CN} \frac{Q_{CN} |Q_{CN}|}{2g\Omega_{CN}^2} \frac{L_{CN}}{D_{CN}} \end{cases}$$

È necessario esprimere le perdite di carico introducendo il valore assoluto delle portate, poiché a priori non è noto il verso del moto, anche se nell'impianto in Figura 5.18 l'ambiguità è presente solo per la portata Q_{CN} .

Tabella 5.3. Tabella riassuntiva delle caratteristiche di funzionamento delle condotte

<i>condotta</i>	<i>L</i> (m)	<i>D</i> (mm)	ε (mm)	<i>Q</i> (l/s)	<i>V</i> (m/s)	<i>J</i> (m/km)	λ (.)
AN	1500	1000	0.2	2003	2.55	5.07	0.015
BN	700	500	0.2	996	5.07	46.27	0.018
CN	3000	800	0.2	1007	2.00	4.13	0.016

**Figura 5.19.** Andamento della piezometrica

Il sistema di equazioni può essere risolto iterativamente, ottenendo i risultati riportati in Tabella 5.3.

I valori positivi di portata indicano che il flusso è concorde rispetto a quello ipotizzato in Figura 5.19. Il carico totale nel nodo N è pari a:

$$H_N = H_A - \lambda_{AN} \frac{Q_{AN} |Q_{AN}|}{2g\Omega_{AN}^2} \frac{L_{AN}}{D_{AN}} =$$

$$130 - 0.015 \times \frac{2.003 \times |2.003|}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 1.0^2}{4}\right)^2} \times \frac{1500}{1.0} = 122.5 \text{ m.}$$

Esercizio 5.13

Nell'impianto in Figura 5.20 le condotte sono in acciaio con scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.36$ mm. Sul tronco NC è installata una saracinesca. Calcolare:

- la portata che arriva ai due serbatoi B e C se la saracinesca è chiusa;
- la portata che arriva ai due serbatoi B e C se la saracinesca è aperta.

◇ Trascurare le perdite di carico concentrate. Il fluido è acqua.

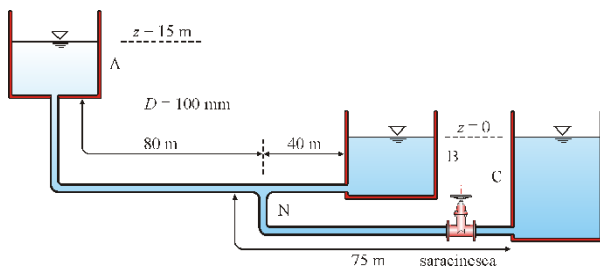


Figura 5.20. Sistema di condotte colleganti tre serbatoi a pelo libero, con saracinesca

Soluzione

Quando la saracinesca è chiusa, la portata in arrivo nel serbatoio C è ovviamente nulla. La portata in arrivo nel serbatoio B si ottiene imponendo il seguente bilancio dell'energia:

$$z_A - z_B = \lambda \frac{V^2 L}{2g D}.$$

Abbiamo trascurato le perdite di carico concentrate. L'indice di resistenza di primo tentativo corrisponde a $Re \rightarrow \infty$ per $\varepsilon/D = 3.6 \times 10^{-3}$. Per il caso in esame risulta $\lambda_\infty = 0.027$ e, quindi, la velocità di primo tentativo è pari a:

$$V' = \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B) D}{\lambda_\infty L}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times (15 - 0) \times 0.1}{0.027 \times 120}} = 3.0 \text{ m/s}.$$

Il numero di Reynolds corrispondente è pari a $Re = \frac{V'D}{\nu} = \frac{3.0 \times 0.1}{10^{-6}} = 300\,000$.

Il valore corretto dell'indice di resistenza è pari a $\lambda = 0.028$, al quale corrisponde una velocità:

$$V = \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B) D}{\lambda L}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times (15 - 0) \times 0.1}{0.028 \times 120}} = 2.96 \text{ m/s}.$$

La portata è pari a:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V = \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times 2.96 = 23.2 \text{ l/s}.$$

Se la saracinesca è aperta, il problema presenta quattro incognite, ossia il carico nel nodo comune N e le velocità nei tre tronchi. È possibile scrivere le seguenti equazioni di bilancio dell'energia e di continuità:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A - z_N = \lambda_{AN} \frac{V_{AN}^2}{2g} \frac{L_{AN}}{D} \\ z_N - z_B = \lambda_{NB} \frac{V_{NB}^2}{2g} \frac{L_{NB}}{D} \\ z_N - z_C = \lambda_{NC} \frac{V_{NC}^2}{2g} \frac{L_{NC}}{D} \\ Q_{AN} = Q_{NB} + Q_{NC} . \end{array} \right.$$

Il verso dei flussi non può che essere dal serbatoio A verso il nodo N e dal nodo N verso i due serbatoi B e C. L'ultima è l'equazione di continuità nel nodo che, scritta per condotte confluenti di pari diametro, diventa:

$$V_{AN} = V_{NB} + V_{NC}.$$

La soluzione si ottiene iterativamente, alla ricerca del corretto valore degli indici di resistenza. I risultati sono riportati in Tabella 5.4.

Tabella 5.4. Tabella riassuntiva delle caratteristiche di funzionamento delle condotte

<i>condotta</i>	<i>Q</i> (l/s)	<i>V</i> (m/s)	<i>λ</i> (.)
AN	3.35	26.30	0.028
NB	1.94	15.23	0.028
NC	1.41	11.07	0.029

Esercizio 5.14

Per l'impianto in Figura 5.21 calcolare il valore minimo di h necessario per garantire una *portata in uscita dal serbatoio* di 28.3 l/s con una pressione relativa residua nella sezione terminale pari a 3.44 bar. La portata si divide esattamente in due in corrispondenza della giunzione G. La condotta è in materiale plastico idraulicamente liscio e ha diametro di 150 mm.

◇ Eseguire i calcoli trascurando le perdite di carico concentrate.

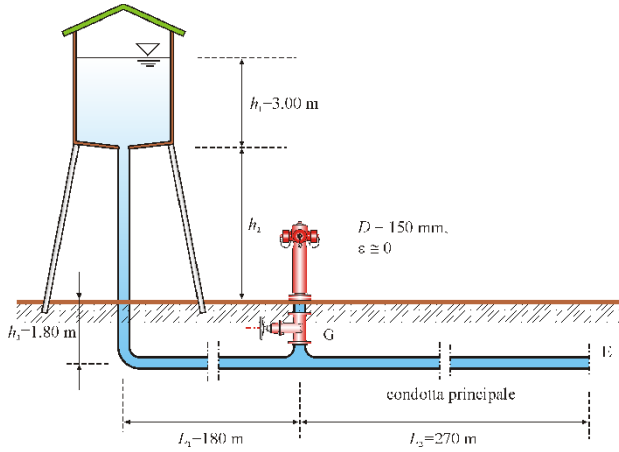


Figura 5.21. Serbatoio sopraelevato

Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia tra il pelo libero del serbatoio e il nodo G è la seguente:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_G + \frac{p_G}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{(L_1 + h_2 + h_3)}{D}.$$

z_0 e z_G sono, rispettivamente, la quota del pelo libero e la quota del nodo G. L'equazione di bilancio dell'energia tra nodo G e la sezione terminale della condotta principale è la seguente:

$$z_G + \frac{p_G}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D}.$$

Combinando le due equazioni, risulta:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{(L_1 + h_2 + h_3)}{D} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D}.$$

La velocità media dell'acqua nel primo tronco di condotta è pari a:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 28.3 \times 10^{-3}}{\pi \times (0.15)^2} = 1.6 \text{ m/s}.$$

Nel secondo tronco, a valle del nodo G, la velocità media è pari a:

$$V_2 = \frac{4(Q/2)}{\pi D^2} = \frac{4 \times (28.3/2) \times 10^{-3}}{\pi \times (0.15)^2} = 0.8 \text{ m/s}.$$

L'indice di resistenza al moto nel primo tronco si ottiene dall'abaco di Moody o risolvendo l'equazione di Coolebrook-White per tubi lisci:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Il numero di Reynolds nei due tronchi di condotta è pari, rispettivamente, a:

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{1.6 \times 0.15}{10^{-6}} = 240\,000$$

$$\text{Re}_2 = \frac{V_2 D}{\nu} = \frac{0.8 \times 0.15}{10^{-6}} = 120\,000.$$

Gli indici di resistenza valgono, rispettivamente:

$$\lambda_1 = 0.015$$

$$\lambda_2 = 0.0173.$$

Assunto $V_0 = 0$, $p_0 = 0$ e trascurando l'altezza cinetica nel secondo tronco, poiché $z_0 - z_E = h_1 + h_2 + h_3$, risulta:

$$\begin{aligned} h_2 - \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{h_2}{D} &= \frac{p_E}{\gamma} + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{(L_1 + h_3)}{D} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D} - h_1 - h_3 \rightarrow \\ h_2 \times \left(1 - 0.015 \times \frac{1.6^2}{2 \times 9.806} \times \frac{1}{0.15} \right) &= \\ \frac{3.44 \times 10^5}{9806} + 0.015 \times \frac{1.6^2}{2 \times 9.806} \times \frac{180 + 1.8}{0.15} & \\ + 0.0173 \times \frac{0.8^2}{2 \times 9.806} \times \frac{270}{0.15} - 3.0 - 1.8 & \end{aligned}$$

che ammette la soluzione $h_2 \cong 34$ m.

Circuiti idraulici industriali

Esercizio 6.1

L'impianto di ricircolo rappresentato in planimetria nella Figura 6.1 opera con la portata idrica Q ed è disposto su un piano orizzontale. Le tubazioni sono in acciaio con indice di scabrezza di Strickler pari a k e hanno diametro uniforme D . Il coefficiente di perdita localizzata nelle curve dell'impianto è pari a ξ . È presente un raddoppio di tubi con collettore a T composto da 2 tubi di diametro d , lunghezza L_2 con indice di scabrezza di Strickler pari a k . Nella sezione immediatamente a valle della pompa, è disposto un manometro che indica una pressione in asse p_n .

Si determini:

- la potenza necessaria per la pompa installata nel circuito nell'ipotesi che il rendimento complessivo sia pari a η ;
 - la componente orizzontale della spinta sulla curva delimitata dalle sezioni 1 e 2 indicate in Figura 6.1.
- ◇ Dati numerici: $Q = (3 + 0.1 \times C_u)$ l/s, $L = (10 + 0.1 \times C_{pu})$ m, $D = (40 + C_u)$ mm, $k = (80 + C_u)$ m^{1/3}/s, $L_1 = (6 + 0.1 \times C_{pu})$ m, $\xi = 0.3$, $d = 15$ mm, $L_2 = (5 + 0.1 \times C_{pu})$ m, $\eta = 0.75$, $p_n = 3$ bar, $\nu = 10^{-6}$ m²/s, $\gamma = 9806$ N/m³.

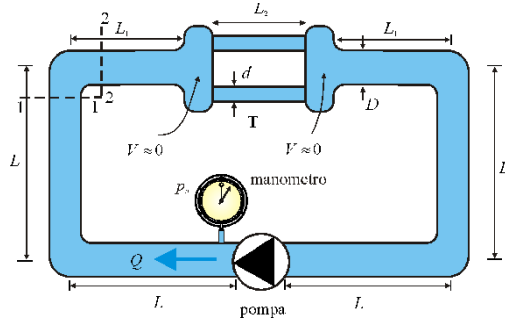


Figura 6.1. Schema dell'impianto di ricircolo

Soluzione

La prevalenza richiesta alla pompa in assenza di variazioni di quota geodetica è pari alle sole perdite di carico concentrate e distribuite:

$$\begin{aligned}
 \Delta H = & \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2 D^{5.33}} (4L + 2L_1) Q^2}_{\text{perdita distribuita nei tronchi di diametro } D} + \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2 d^{5.33}} L_2 \left(\frac{Q}{2}\right)^2}_{\text{perdita distribuita nel tronco di diametro } d} + \\
 & + \underbrace{4\xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita concentrata nelle curve}} + \underbrace{\frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita di sbocco nel collettore sx}} + \underbrace{0.5 \frac{16(Q/2)^2}{(\pi d^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita d'imbocco nel tronco di diametro } d} + \\
 & + \underbrace{\frac{16(Q/2)^2}{(\pi d^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita di sbocco nel collettore dx}} + \underbrace{0.5 \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita d'imbocco nel tronco di diametro } D}.
 \end{aligned}$$

La potenza della pompa è esprimibile come segue:

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta}.$$

Per il calcolo della spinta sulla curva, applichiamo il bilancio di quantità di moto (equazione globale della dinamica dei fluidi) al volume di controllo delimitato dalla sezione 1 e 2 e dalle pareti della curva (Figura 6.2):

$$\cancel{G} + \Pi + \cancel{I} + M_1 - M_2 = 0 \rightarrow -F + \Pi_1 + \Pi_2 + M_1 - M_2 = 0.$$

$-F$ è la spinta esercitata dalla curva sul volume di controllo. Il contributo del peso è nullo nel piano orizzontale.

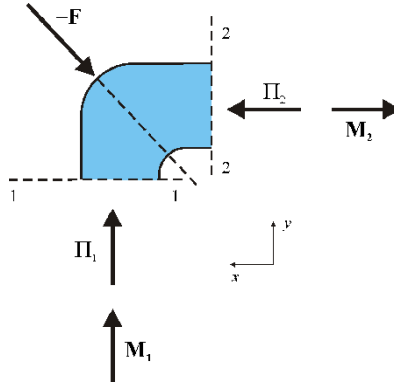


Figura 6.2. Schema per il calcolo delle azioni sulla curva

Il calcolo delle spinte Π_1 e Π_2 richiede la conoscenza della pressione nella sezione 1 e nella sezione 2. Sulla base del bilancio di energia, risulta:

$$\begin{aligned}
 H_1 = H_n - \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2 D^{5.33}} (2L) Q^2}_{\text{perdita distribuita nei tronchi di diametro } D} - \underbrace{\xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita concentrata nella curva}} \rightarrow \\
 z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_n + \frac{p_n}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2 D^{5.33}} (2L) Q^2}_{\text{perdita distribuita nei tronchi di diametro } D} - \\
 - \underbrace{\xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita concentrata nella curva}} .
 \end{aligned}$$

Analogamente si calcola la pressione agente nella sezione 2:

$$\begin{aligned}
 H_2 = H_1 - \underbrace{\xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita concentrata nella curva}} \rightarrow \\
 z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \underbrace{\xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g}}_{\text{perdita concentrata nella curva}} .
 \end{aligned}$$

Il flusso di quantità di moto in ingresso \mathbf{M}_1 è pari, in modulo, al flusso di quantità di moto in uscita \mathbf{M}_2 :

$$|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = \rho \frac{4Q^2}{\pi D^2}.$$

Applicando il bilancio di quantità di moto in direzione y risulta:

$$F_y = p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho \frac{4Q^2}{\pi D^2}$$

nel verso positivo delle y .

In direzione x risulta:

$$F_x = p_2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho \frac{4Q^2}{\pi D^2}$$

nel verso positivo delle x .

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$Q = 3 \text{ l/s}$, $L = 10 \text{ m}$, $D = 40 \text{ mm}$, $k = 80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, $L_1 = 6 \text{ m}$, $\xi = 0.3$, $d = 15 \text{ mm}$, $L_2 = 5 \text{ m}$, $\eta = 0.75$, $p_n = 3 \text{ bar}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$

$$\begin{aligned} \Delta H = & \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 \times 80^2 \times 0.04^{5.33}} \times (4 \times 10 + 2 \times 6) \times (3 \times 10^{-3})^2}_{\text{perdita distribuita nei tronchi di diametro } D} + \\ & + \underbrace{\frac{4^{10/3}}{\pi^2 \times 80^2 \times 0.015^{5.33}} \times \left(\frac{3 \times 10^{-3}}{2}\right)^2 \times 5}_{\text{perdita distribuita nel tronco di diametro } d} + \\ & + \underbrace{4 \times 0.3 \times \frac{16 \times (3 \times 10^{-3})^2}{(\pi \times 0.04^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806}}_{\text{perdita concentrata nelle curve}} + \underbrace{\frac{16 \times (3 \times 10^{-3})^2}{(\pi \times 0.04^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806}}_{\text{perdita di sbocco nel collettore sx}} + \\ & + \underbrace{0.5 \times \frac{16 \times (3 \times 10^{-3}/2)^2}{(\pi \times 0.015^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806}}_{\text{perdita d'imbocco nel tronco di diametro } d} + \underbrace{\frac{16 \times (3 \times 10^{-3}/2)^2}{(\pi \times 0.015^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806}}_{\text{perdita di sbocco nel collettore dx}} + \\ & + \underbrace{0.5 \times \frac{16 \times (3 \times 10^{-3})^2}{(\pi \times 0.04^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806}}_{\text{perdita d'imbocco nel tronco di diametro } D} = \\ & 21.26 + 95.24 + 0.35 + 0.29 + 1.84 + 3.67 + 0.14 = 122.79 \text{ m} \end{aligned}$$

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} = \frac{9806 \times 0.003 \times 122.79}{0.75} = 4.82 \text{ kW}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_n - \gamma \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2 D^{5.33}} (2L) Q^2 - \gamma \xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g} = \\
3 \times 10^5 - 9806 \times \frac{4^{10/3}}{80^2 \times 0.04^{5.33}} \times (2 \times 10) \times (3 \times 10^{-3})^2 - \\
9806 \times 0.3 \times \frac{16 \times (3 \times 10^{-3})^2}{(\pi \times 0.04^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806} &= 218\,973 \text{ Pa} \\
p_2 &= p_1 - \gamma \xi \frac{16Q^2}{(\pi D^2)^2} \frac{1}{2g} = \\
218\,973 - 9806 \times 0.3 \times \frac{16 \times (3 \times 10^{-3})^2}{(\pi \times 0.04^2)^2} \times \frac{1}{2 \times 9.806} &= 218\,118 \text{ Pa} \\
F_y &= p_1 \frac{\pi D^2}{4} + \rho \frac{4Q^2}{\pi D^2} = 218\,973 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} + 1000 \times \frac{4 \times (3 \times 10^{-3})^2}{\pi \times 0.04^2} = 282 \text{ N} \\
F_x &= p_2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho \frac{4Q^2}{\pi D^2} = 218\,118 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} + 1000 \times \frac{4 \times (3 \times 10^{-3})^2}{\pi \times 0.04^2} = 281 \text{ N}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.2

Nell'impianto in Figura 6.3 i due serbatoi sono pressurizzati e collegati da una condotta in acciaio di diametro $D = 50$ mm. La lettura ai manometri (pressione relativa) è pari a $p_A = (15 + C_u/10)$ bar e $p_B = (8 + C_{pu}/10)$ bar e le quote dei livelli sono pari, rispettivamente, a $z_A = (30 + C_u)$ m e $z_B = (40 + C_u)$ m.

Una saracinesca separa la condotta in due tronchi di lunghezza $L_1 = (35 + C_u)$ m e $L_2 = (30 + C_u)$ m.

- Calcolare la portata in transito nel caso di saracinesca completamente aperta.
 - Calcolare la portata in transito nel caso di saracinesca con grado di apertura $\eta = 0.5$.
 - Per quest'ultima configurazione, disegnare la linea dei carichi effettivi.
- ◇ Per le condotte, si assuma $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Il fluido è acqua con peso specifico $\gamma = 9800 \text{ N/m}^3$. Le perdite di carico nella valvola siano rapportate al grado di apertura secondo la relazione:

$$\Delta H = \xi \frac{V^2}{2g} \quad \text{con} \quad \xi = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2.$$

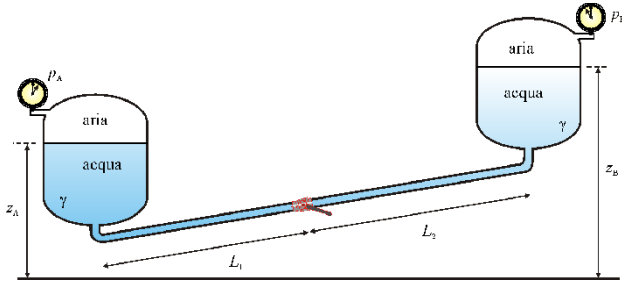


Figura 6.3. Impianto con due serbatoi pressurizzati e saracinesca di regolazione

Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia è la seguente:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} = J_1 L_1 + J_2 L_2 + \left[\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2\xi_{curva} + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \right] \frac{V^2}{2g}.$$

ξ_{imb} , ξ_{sbocco} , ξ_{curva} sono i coefficienti di perdita di carico all'imbocco, allo sbocco e nella curva.

La cadente dell'energia è pari a:

$$J_1 \equiv J_2 = \frac{4^{4/3} V^2}{k^2 D^{4/3}}$$

e, quindi:

$$V = \sqrt{\frac{2g \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} \right)}{\left[2g (L_1 + L_2) \frac{4^{4/3}}{k^2 D^{4/3}} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2\xi_{curva} + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \right]}}.$$

La portata è pari a:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4}.$$

La perdita di carico nella valvola è pari a:

$$\Delta H = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$D = 50$ mm, $p_A = 15$ bar, $p_B = 8$ bar, $z_A = 30$ m, $z_B = 40$ m, $L_1 = 35$ m, $L_2 = 30$ m

Assumendo $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 1$, $\xi_{curva} = 0.3$, per $\eta = 1$ (saracinesca completamente aperta) si calcola:

$$V = \sqrt{\frac{2g \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} \right)}{\left[2g (L_1 + L_2) \frac{4^{4/3}}{k^2 D^{4/3}} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2\xi_{curva} + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \right]}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times \left(30 + \frac{15 \times 10^5}{9800} - 40 - \frac{8 \times 10^5}{9800} \right)}{\left[2 \times 9.806 \times (35 + 30) \times \frac{4^{4/3}}{90^2 \times 0.05^{4/3}} + 0.5 + 1 + 2 \times 0.3 + \left(\frac{1}{1} - 1 \right)^2 \right]}}$$

$$= 4.62 \text{ m/s.}$$

La portata è pari a:

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 4.62 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} = 9.1 \text{ l/s.}$$

Per $\eta = 0.5$ (saracinesca parzializzata), si calcola:

$$V = \sqrt{\frac{2g \left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} - z_B - \frac{p_B}{\gamma} \right)}{\left[2g (L_1 + L_2) \frac{4^{4/3}}{k^2 D^{4/3}} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} + 2\xi_{curva} + \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \right]}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times \left(30 + \frac{15 \times 10^5}{9800} - 40 - \frac{8 \times 10^5}{9800} \right)}{\left[2 \times 9.806 \times (35 + 30) \times \frac{4^{4/3}}{90^2 \times 0.05^{4/3}} + 0.5 + 1 + 2 \times 0.3 + \left(\frac{1}{0.5} - 1 \right)^2 \right]}}$$

$$= 4.58 \text{ m/s}$$

$$Q = V \frac{\pi D^2}{4} = 4.58 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} = 9.0 \text{ l/s.}$$

L'altezza cinetica è pari a:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{4.58^2}{2 \times 9.806} = 1.07 \text{ m.}$$

La perdita di carico nella valvola è pari a:

$$\Delta H = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g} = \left(\frac{1}{0.5} - 1 \right)^2 \times \frac{4.58^2}{2 \times 9.806} = 1.07 \text{ m.}$$

La linea dei carichi effettivi è riportata in Figura 6.4.

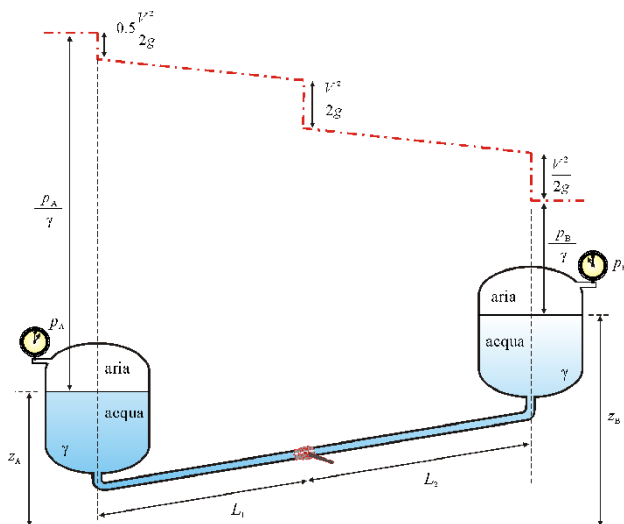


Figura 6.4. Linea dei carichi effettivi

Esercizio 6.3

Nell'impianto a circuito chiuso in Figura 6.5, che si sviluppa sul piano orizzontale, è inserito un Venturimetro per la misura della portata. L'indicazione del manometro differenziale è pari a $\Delta p = (0.05 + 0.005 \times C_u)$ bar e il coefficiente di velocità del Venturimetro è pari a $C_v = 0.984$. Il diametro della sezione ristretta è $d = (50 + 5 \times C_{pu})$ mm, il diametro della sezione d'ingresso, coincidente con il diametro corrente della condotta, è $D = (75 + 5 \times C_{pu})$ mm. La lunghezza della condotta, in acciaio, con coefficiente di Gauckler-Strickler $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, è $L = (25 + 10 \times C_u)$ m. Il coefficiente di perdita concentrata per ogni curva è $\xi_{curva} = 0.3$, il coefficiente di perdita concentrata per lo scambiatore è $\xi_s = 1.65$, la perdita di carico nel Venturimetro è fornita dalla seguente espressione:

$$\Delta H_{Venturi} = \left[0.218 - 0.42 \frac{d}{D} + 0.38 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] \frac{\Delta p}{\gamma}$$

in cui Δp è la differenza di pressione indicata dal manometro differenziale. Calcolare:

- la portata di moto permanente;
- la potenza della pompa.

◇ Il fluido è acqua; il rendimento della pompa è pari a $\eta = 0.8$.

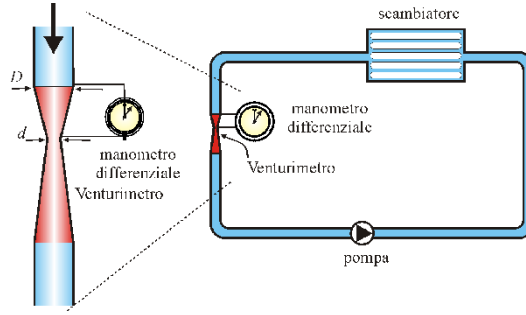


Figura 6.5. Impianto a circuito chiuso con scambiatore

Soluzione

Applicando il Teorema di Bernoulli tra la sezione corrente e la sezione ristretta, si ricava la seguente espressione della portata che attraversa il Venturimetro:

$$Q = C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{\frac{2g\Delta p}{\gamma}}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}.$$

C_v è il coefficiente di riduzione della velocità, per tenere conto delle dissipazioni, Δp è la differenza di pressione alle prese.

La prevalenza della pompa deve solo compensare le perdite concentrate e distribuite, ed è pari a:

$$\begin{aligned} \Delta H = JL + \sum \xi_{curva} \frac{V^2}{2g} + \xi_s \frac{V^2}{2g} + \Delta H_{Venturi} = \\ \frac{4^{4/3} Q^2}{k^2 D^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} L + (4\xi_{curva} + \xi_s) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} + \\ \left[0.218 - 0.42 \frac{d}{D} + 0.38 \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \frac{\Delta p}{\gamma}. \end{aligned}$$

La potenza della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$\Delta p = 0.05$ bar, $d = 50$ mm, $D = 75$ mm, $L = 25$ m

$$Q = C_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2g\Delta p}{\gamma \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)}} =$$

$$0.984 \times \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \times \sqrt{\frac{\frac{2 \times 9.806 \times 0.05 \times 10^5}{9806}}{1 - \left(\frac{0.05}{0.075}\right)^4}} = 6.82 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

La velocità media in condotta è pari a 1.54 m/s.

La perdita di carico nel Venturimetro è pari a:

$$\Delta H_{Venturi} = \left[0.218 - 0.42 \frac{d}{D} + 0.38 \left(\frac{d}{D}\right)^2 \right] \frac{\Delta p}{\gamma} =$$

$$\left[0.218 - 0.42 \times \frac{0.05}{0.075} + 0.38 \times \left(\frac{0.05}{0.075}\right)^2 \right] \times \frac{0.05 \times 10^5}{9806} = 0.05 \text{ m}$$

e la perdita di carico totale è pari a:

$$\Delta H = \frac{4^{4/3} Q^2}{k^2 D^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} L + (4\xi_{curva} + \xi_s) \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} + \Delta H_{Venturi} =$$

$$\frac{Q^2}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \left(\frac{4^{4/3} L}{k^2 D^{4/3}} + \frac{4\xi_{curva} + \xi_s}{2g} \right) + \Delta H_{Venturi} =$$

$$\frac{(6.82 \times 10^{-3})^2}{\left(\frac{\pi \times 0.075^2}{4}\right)^2} \times \left(\frac{4^{4/3} \times 25}{90^2 \times 0.075^{4/3}} + \frac{4 \times 0.3 + 1.65}{2 \times 9.806} \right) + 0.05 = 1.87 \text{ m}.$$

La potenza della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta} = \frac{9806 \times 6.82 \times 10^{-3} \times 1.87}{0.8} = 156 \text{ W}.$$

Esercizio 6.4

L'impianto in Figura 6.6 è a circuito chiuso. L'acqua viene pompata in una condotta di diametro $D = 30$ mm e scabrezza relativa pari a 0.01, lunga 60 m. Lungo il percorso, l'acqua attraversa un filtro con un coefficiente di perdita pari a 12.0 e attraversa cinque gomiti con coefficiente di perdita pari a 1.5 per ogni gomito. I coefficienti di perdita all'imbocco e allo sbocco sono pari a 0.8 e 1.0 rispettivamente. La valvola ha un coefficiente di perdita pari a 6.0. Calcolare:

- la portata circolante se la potenza trasmessa al fluido dalla pompa è pari a 270 W;
- il rapporto tra perdite di carico concentrate e perdite di carico distribuite.

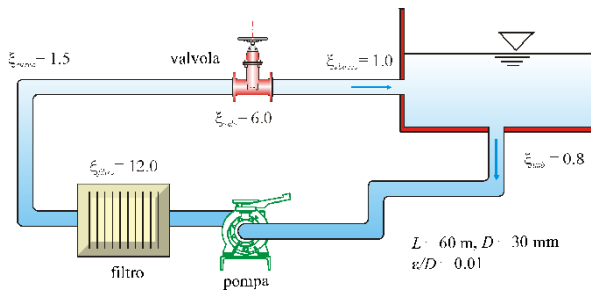


Figura 6.6. Impianto di filtraggio

Soluzione

La prevalenza della pompa deve bilanciare le sole perdite di carico distribuite e concentrate nell'impianto:

$$\Delta H = (\xi_{imb} + 5\xi_{curva} + \xi_{filtro} + \xi_{valv} + \xi_{sbocco}) \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D}$$

e, in funzione della portata:

$$\Delta H = \left(\xi_{imb} + 5\xi_{curva} + \xi_{filtro} + \xi_{valv} + \xi_{sbocco} + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$$

con $\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$.

La potenza trasferita alla corrente è pari a:

$$P = \gamma Q \Delta H.$$

Quindi:

$$P = \gamma Q \Delta H \equiv \left(\xi_{imb} + 5\xi_{curva} + \xi_{filtro} + \xi_{valv} + \xi_{sbocco} + \lambda \frac{L}{D} \right) \frac{\gamma Q^3}{2g\Omega^2}.$$

Invertendo risulta:

$$Q = \left[\frac{2g\Omega^2 P}{\gamma \left(\xi_{imb} + 5\xi_{curva} + \xi_{filtro} + \xi_{valv} + \xi_{sbocco} + \lambda \frac{L}{D} \right)} \right]^{1/3}.$$

L'equazione può essere risolta iterativamente assumendo un valore dell'indice di resistenza di primo tentativo pari al suo valore asintotico ($\text{Re} \rightarrow \infty$):

$$\lambda = \lambda_{\infty} = 0.038.$$

Inserendo i valori numerici, risulta:

$$Q = \left[\frac{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.25 \times 0.03^2)^2 \times 270}{9806 \times \left(0.8 + 5 \times 1.5 + 12.0 + 6.0 + 1.0 + 0.038 \times \frac{60}{0.03} \right)} \right]^{1/3} = 1.38 \text{ l/s}.$$

La velocità media in condotta è pari a:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.00138}{\pi \times 0.03^2} = 1.95 \text{ m/s}.$$

Il numero di Reynolds in condotta è pari a:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.95 \times 0.03}{10^{-6}} = 58\,500.$$

Il flusso è in regime di transizione. Il nuovo indice di resistenza si calcola iterando ed assume valore pari a $\lambda = 0.039$, con una portata corrispondente $Q = 1.37 \text{ l/s}$.

Il rapporto tra le perdite di carico concentrate e le perdite di carico distribuite è pari a:

$$\frac{\xi_{imb} + 5\xi_{curva} + \xi_{filtro} + \xi_{valv} + \xi_{sbocco}}{\lambda \frac{L}{D}} = \frac{0.8 + 5 \times 1.5 + 12.0 + 6.0 + 1.0}{0.039 \times \frac{60}{0.03}} = 0.35.$$

Circuiti con macchine idrauliche: pompe e turbine

Esercizio 7.1

Dal serbatoio in Figura 7.1 parte, con imbocco a spigolo vivo, una condotta in ghisa ($\varepsilon = 0.25$ mm) costituita da due tratti in serie, di lunghezza $L_1 = (20 + C_u)$ m, $L_2 = (35 + C_{pu})$ m, e diametro $D_1 = 80$ mm e $D_2 = 60$ mm.

Il serbatoio contiene acqua a 15°C ($\rho = 999.1$ kg/m³ e $\mu = 1.138 \times 10^{-3}$ Pa · s) per un'altezza $h = (20 + C_u)$ m. Calcolare:

- la prevalenza della pompa necessaria per mantenere una portata $Q = 16$ l/s;
- la corrispondente potenza della pompa, con rendimento $\eta = 0.75$;
- la pressione nella condotta immediatamente a monte della pompa.

◇ Si assuma $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 1$.

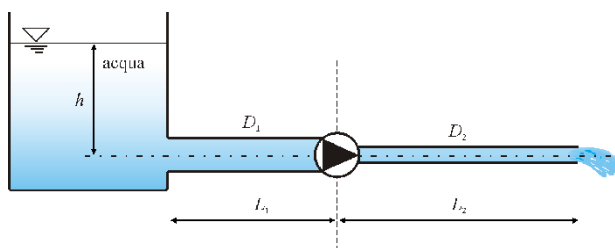


Figura 7.1. Serbatoio con pompa di spinta

Soluzione

L'equazione di bilancio dell'energia è la seguente:

$$h + \Delta H_{pompa} = \xi_{imb} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D_2} + \xi_{sbocco} \frac{V_2^2}{2g}.$$

Le velocità nei due tronchi di condotta possono essere espresse in funzione della portata come segue:

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2}$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2}.$$

Per il calcolo degli indici di resistenza, il numero di Reynolds da introdurre nell'abaco di Moody (o nell'equazione di Colebrook-White) è pari a:

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho V_1 D_1}{\mu}$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu}.$$

Calcolata la prevalenza della pompa, la potenza necessaria è pari a:

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H_{pompa}}{\eta}.$$

Per il calcolo della pressione nella condotta subito a monte della pompa, applichiamo l'equazione di bilancio dell'energia tra il serbatoio e la sezione di interesse:

$$\underbrace{z_s + \frac{p_s}{\gamma}}_h + \cancel{\frac{V^2}{2g}} - \xi_{imb} \frac{V_1^2}{2g} - \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} = \cancel{z_m} + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \rightarrow$$

$$p_m = \gamma \left[h - (1 + \xi_{imb}) \frac{V_1^2}{2g} - \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} \right].$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$\varepsilon = 0.25 \text{ mm}$, $L_1 = 20 \text{ m}$, $L_2 = 35 \text{ m}$, $D_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 60 \text{ mm}$, $\rho = 999.1 \text{ kg/m}^3$,
 $\mu = 1.138 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $h = 20 \text{ m}$.

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 16 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 0.08^2} = 3.18 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 16 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 0.06^2} = 5.66 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho V_1 D_1}{\mu} = \frac{999.1 \times 3.18 \times 0.08}{1.138 \times 10^{-3}} = 223\,000$$

$$\text{Re}_2 = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} = \frac{999.1 \times 5.66 \times 0.06}{1.138 \times 10^{-3}} = 298\,000.$$

Risolvendo numericamente l'equazione di Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

risulta:

$$\lambda_1 = 0.027, \lambda_2 = 0.029$$

$$\Delta H_{pompa} = -h + \xi_{imb} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D_2} + \xi_{sbocco} \frac{V_2^2}{2g} =$$

$$-20 + 0.5 \times \frac{3.18^2}{2 \times 9.806} + 0.027 \times \frac{3.18^2}{2 \times 9.806} \times \frac{20}{0.08} +$$

$$+ 0.029 \times \frac{5.66^2}{2 \times 9.806} \times \frac{35}{0.06} + \frac{5.66^2}{2 \times 9.806} = 13.00 \text{ m}$$

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H_{pompa}}{\eta} = \frac{9.806 \times 999.1 \times 16 \times 10^{-3} \times 13.00}{0.75} = 2718 \text{ W}$$

$$p_m = \gamma \left[h - (1 + \xi_{imb}) \frac{V_1^2}{2g} - \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} \right] =$$

$$9.806 \times 999.1 \times \left(20 - 1.5 \times \frac{3.18^2}{2 \times 9.806} - 0.027 \frac{3.18^2}{2 \times 9.806} \times \frac{20}{0.08} \right) = 1.54 \text{ bar}.$$

Esercizio 7.2

Nell'impianto di sollevamento in Figura 7.2 il serbatoio B è pressurizzato. Sono note le caratteristiche delle condotte, la potenza e il rendimento η della pompa.

- Calcolare la portata.
- Disegnare la linea dei carichi totali e la linea piezometrica.

◇ Il manometro indica la pressione relativa. Dati numerici:

$$\Delta H_g = (25 + C_{pu}) \text{ m}, p_m = (1 + C_u \times 0.1) \text{ bar}, D_a = D_m = 300 \text{ mm}, \\ \varepsilon_a = \varepsilon_m = 0.2 \text{ mm}, L_a = 20 \text{ m}, L_m = 400 \text{ m}, P = (50 + C_u) \text{ kW}, \eta = 0.75, \\ \gamma_{acqua} = 9800 \text{ N/m}^3, \xi_{imb} = 0.5, \xi_{sbocco} = 1, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

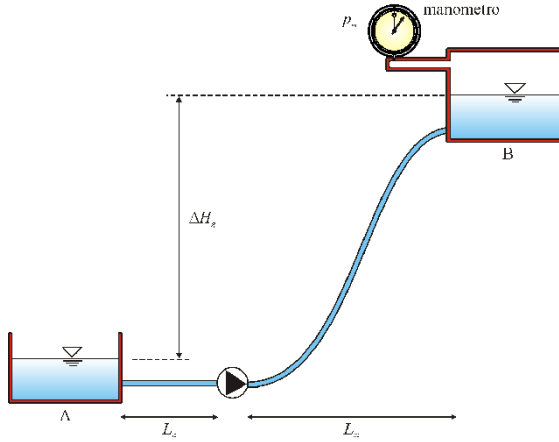


Figura 7.2. Impianto di sollevamento

Soluzione

La potenza all'asse della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta}.$$

È necessario calcolare la prevalenza totale, somma della prevalenza geodetica, della prevalenza associata alla pressione nel serbatoio B e delle perdite di carico.

Scrivendo il bilancio di energia, risulta:

$$\Delta H = \Delta H_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \frac{V_a^2}{2g} + \lambda_m \frac{L_m}{D_m} \frac{V_m^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_a^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_m^2}{2g} + \frac{p_m}{\gamma_{acqua}}$$

ovvero:

$$\Delta H = \Delta H_g + \left(\lambda \frac{L_a + L_m}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right) \frac{Q^2}{2g (\pi D^2 / 4)^2} + \frac{p_m}{\gamma_{acqua}}.$$

p_m è la pressione relativa indicata dal manometro. Inoltre:

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta} = \frac{\gamma_{acqua} Q \left[\Delta H_g + \left(\lambda \frac{L_a + L_m}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right) \frac{Q^2}{2g (\pi D^2 / 4)^2} + \frac{p_m}{\gamma_{acqua}} \right]}{\eta}.$$

Quest'ultima equazione è cubica nella portata. La procedura di calcolo è iterativa. Si assume, in prima approssimazione, che il moto sia turbolento pienamente sviluppato e si stima l'indice di resistenza dall'abaco di Moody per $Re \rightarrow \infty$, oppure

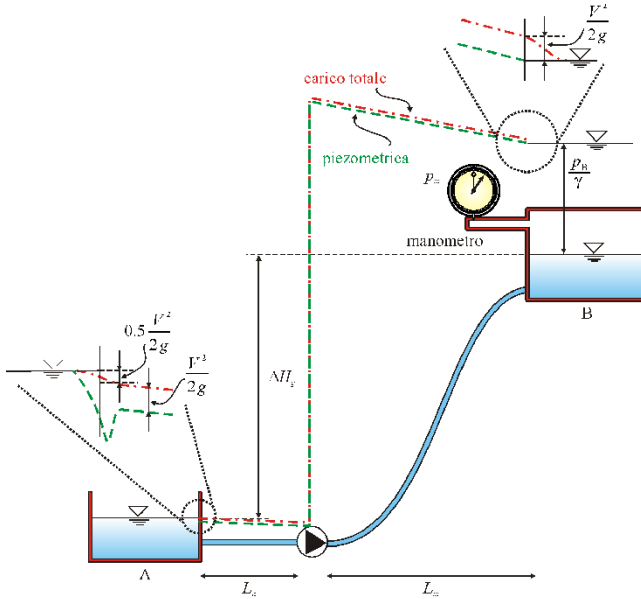


Figura 7.3. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

dall'equazione di Prandtl-Nikuradse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right).$$

Risolvendo l'equazione cubica nella portata, si ricava Q , V , Re e si verifica che il moto sia turbolento pienamente sviluppato. In caso contrario, si ricalcola l'indice di resistenza sulla base del valore del numero di Reynolds calcolato all'iterazione precedente, facendo uso dell'abaco di Moody oppure risolvendo numericamente l'equazione di Colebrook-White nella sua espressione completa:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right).$$

La linea dei carichi totali e la linea piezometrica sono riportate in Figura 7.3.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$\Delta H_g = 25$ m, $p_m = 1$ bar, $D_a = D_m = 300$ mm, $\varepsilon_a = \varepsilon_m = 0.2$ mm, $L_a = 20$ m, $L_m = 400$ m, $P = 50$ kW, $\eta = 0.75$.

Si assume, in prima approssimazione, $Re \rightarrow \infty$ e, per $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.2}{300} = 6.6 \times 10^{-4}$, risulta $\lambda = 0.018$.

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \left[\Delta H_g + \left(\lambda \frac{L_a + L_m}{D} + 1.5 \right) \frac{Q^2}{2g (\pi D^2/4)^2} + \frac{p_m}{\gamma_{acqua}} \right]}{\eta} \rightarrow$$

$$\frac{9800 \times Q \times \left[25 + \left(0.018 \times \frac{20 + 400}{0.3} + 1.5 \right) \times \frac{Q^2}{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.3^2/4)^2} + \frac{1 \times 10^5}{9800} \right]}{0.75} = 50\,000.$$

Risolvendo l'equazione cubica nella portata, per iterazioni successive si calcola:

$Q = 100$ l/s, $V = 1.42$ m/s, $Re = 427\,000$, $\lambda = 0.0187$.

Si noti che, nel caso in esame, trascurare le perdite di carico concentrate comporterebbe una sovrastima di portata dello 0.3%, del tutto trascurabile.

Esercizio 7.3

L'impianto di pompaggio indicato in Figura 7.4 deve convogliare la portata assegnata Q dal serbatoio A al serbatoio B vincendo un dislivello geodetico pari ad Y . È disponibile per l'installazione nell'impianto una pompa di potenza pari a P .

- Determinare il diametro minimo della tubazione (da realizzarsi in materiale plastico) necessario per soddisfare le esigenze esposte scegliendolo nella serie commerciale dei diametri sotto riportata.
- ◇ Si consideri un rendimento della pompa costante e pari a $\eta = 0.80$. Dati numerici: $Y = (10 + C_u)$ m, $P = (5 + C_{pu}/10)$ kW, $L_1 = (2 + C_{pu}/9)$ m, $L_2 = (25 + C_u)$ m, $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 1.0$, coefficiente ξ complessivo per perdite concentrate nel valvolame = 5.0, $Q = (15 + C_{pu})$ l/s, $\gamma_{acqua} = 9806$ N/m³.

Diametri commerciali in mm (si confonda il diametro nominale con il diametro interno): 50, 65, 80, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200.

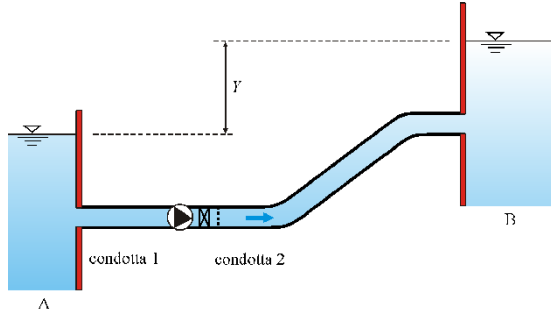


Figura 7.4. Impianto di pompaggio

Soluzione

La potenza all'asse della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta}.$$

Scrivendo il bilancio di energia, risulta:

$$\Delta H = Y + \frac{4^{10/3}}{\pi^2} \frac{Q^2}{k^2 D^{16/3}} (L_1 + L_2) + \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} (\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + \xi).$$

Combinando le due espressioni, risulta:

$$Y + \frac{4^{10/3}}{\pi^2} \frac{Q^2}{k^2 D^{16/3}} (L_1 + L_2) + \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} (\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + \xi) - \frac{\eta P}{\gamma_{acqua} Q} = 0.$$

Da questa relazione, per tentativi, si determina il valore di D , diametro teorico; la tubazione commerciale con diametro immediatamente superiore a questo sarà quella che soddisfa le esigenze di progetto.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, assunto $k = 100 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, risulta:

$Y = 10 \text{ m}$, $P = 5 \text{ kW}$, $L_1 = 2 \text{ m}$, $L_2 = 25 \text{ m}$, $\xi = 5.0$, $Q = 15 \text{ l/s}$.

$$\begin{aligned} Y + \frac{4^{10/3}}{\pi^2} \frac{Q^2}{k^2 D^{16/3}} (L_1 + L_2) + \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} (\xi_{imb} + \xi_{sbocco} + \xi) - \frac{\eta P}{\gamma_{acqua} Q} &= 0 \rightarrow \\ 10 + \frac{4^{10/3}}{\pi^2} \times \frac{0.015^2}{100^2 \times D^{16/3}} \times (2 + 25) + \frac{8 \times 0.015^2}{\pi^2 \times D^4 \times 9.806} \times (0.5 + 1.0 + 5.0) - \\ - \frac{0.80 \times 5000}{9806 \times 0.015} &= 0 \rightarrow \frac{6.2534 \times 10^{-6}}{D^{16/3}} + \frac{1.2089 \times 10^{-4}}{D^4} - 17.194 = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo per tentativi l'equazione di bilancio dell'energia nell'incognita D , si ricava $D = 0.067 \text{ m}$. Si sceglierà il diametro commerciale $D = 80 \text{ mm}$.

Esercizio 7.4

Nell'impianto in Figura 7.5 la pompa assorbe una potenza di 8 kW e ha un rendimento $\eta = 0.7$. L'indice di resistenza della condotta è pari a $\lambda = 0.01$. Dal serbatoio superiore l'acqua fuoriesce attraverso una luce circolare sotto battente di diametro $d = 100$ mm.

Si calcoli:

- la quota del pelo libero nel serbatoio superiore;
 - la portata sollevata dalla pompa.
- ◇ Si assuma un coefficiente di efflusso unitario per la luce circolare. Si assuma un coefficiente di perdita unitario all'imbocco e allo sbocco e pari a 0.1 per ogni curva.

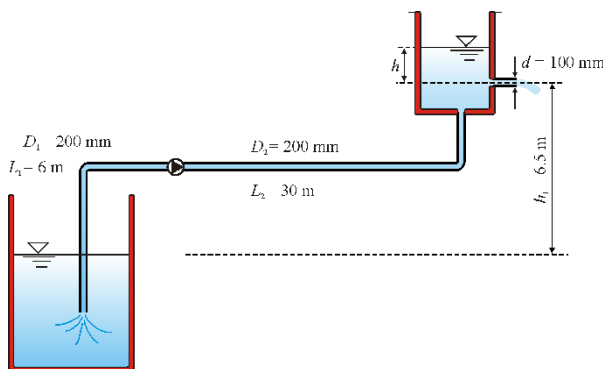


Figura 7.5. Impianto di sollevamento

Soluzione

La potenza della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta}.$$

La prevalenza totale richiesta si può esprimere come segue:

$$\Delta H = \left(\lambda \frac{L_1 + L_2}{D} + \sum \xi_i \right) \frac{Q^2}{2g\Omega^2} + h_1 + h_2.$$

con Ω area della tubazione di diametro $D_1 = D_2 = D = 200$ mm.

A regime, la portata in ingresso nel serbatoio superiore è pari alla portata che fuoriesce attraverso la luce circolare, ed è esprimibile in funzione di h come segue:

$$Q = C_Q \omega \sqrt{2gh}$$

in cui ω è l'area della luce circolare e C_Q è il coefficiente di efflusso. Sostituendo, risulta:

$$\gamma C_Q \omega \sqrt{2gh} \left[\left(\lambda \frac{L_1 + L_2}{D} + \sum \xi_i \right) \frac{C_Q^2 \omega^2}{\Omega^2} h + h_1 + h \right] = \eta P.$$

Inserendo i valori numerici, risulta:

$$9806 \times 1 \times \frac{\pi \times (0.1)^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9.806 \times h} \times \\ \times \left[\left(0.01 \times \frac{6 + 30}{0.2} + 2.2 \right) \times \frac{1 \times (0.1)^2}{(0.2)^2} \times h + 6.5 + h \right] = 0.7 \times 8000.$$

Tale equazione può essere risolta numericamente per tentativi e ammette la soluzione $h = 2.24$ m.

La portata è pari a:

$$Q = C_Q \omega \sqrt{2gh} = 1 \times \frac{\pi \times (0.1)^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9.806 \times 2.24} = 52.1 \text{ l/s}.$$

Esercizio 7.5

Nell'impianto di sollevamento in Figura 7.6 il serbatoio A è pressurizzato. Sono note le caratteristiche delle condotte, la portata Q da convogliare e il rendimento della pompa η .

- Calcolare la potenza della pompa.
- Disegnare la linea dei carichi totali e la linea piezometrica.

◇ Dati numerici:

$$\Delta H_g = (25 + C_{pu}) \text{ m}, p_m = (1 + C_u \times 0.1) \text{ bar}, D_a = D_m = 300 \text{ mm}, \\ \varepsilon_a = \varepsilon_m = 0.2 \text{ mm}, L_a = 20 \text{ m}, L_m = 400 \text{ m}, Q = (80 + C_u) \text{ l/s}, \eta = 0.75.$$

Soluzione

La potenza all'asse della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta}.$$

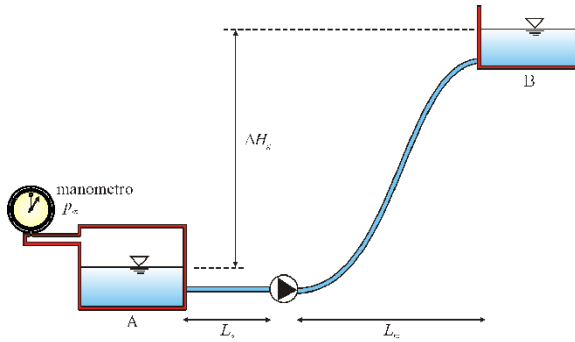


Figura 7.6. Impianto di sollevamento

È necessario calcolare la prevalenza. Scrivendo il bilancio di energia, risulta:

$$\Delta H = \Delta H_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \frac{V_a^2}{2g} + \lambda_m \frac{L_m}{D_m} \frac{V_m^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_a^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_m^2}{2g} - \frac{p_m}{\gamma_{acqua}}.$$

Gli indici di resistenza si calcolano dall'abaco di Moody o dalla relazione di Colebrook-White. Il numero di Reynolds è pari a:

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\nu \pi D}$$

e la scabrezza relativa è pari a ε/D .

L'andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali è riportato in Figura 7.7.

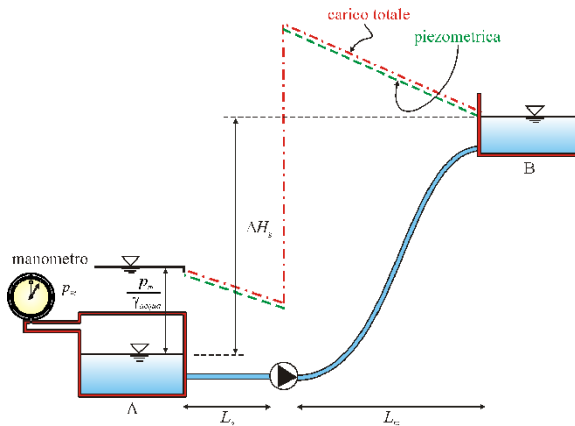


Figura 7.7. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$\Delta H_g = 25$ m, $p_m = 1$ bar, $D_a = D_m = 300$ mm, $\varepsilon_a = \varepsilon_m = 0.2$ mm, $L_a = 20$ m, $L_m = 400$ m, $Q = 80$ l/s, $\eta = 0.75$.

Si calcola:

$$Re = \frac{QD}{\nu \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)} = \frac{0.08 \times 0.3}{10^{-6} \times \left(\frac{\pi \times 0.3^2}{4} \right)} = 340\,000$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.2}{300} = 6.6 \times 10^{-4}$$

$$\lambda = 0.018$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.08}{\pi \times 0.3^2} = 1.13 \text{ m/s}$$

$$\Delta H = \Delta H_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \frac{V_a^2}{2g} + \lambda_m \frac{L_m}{D_m} \frac{V_m^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_a^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_m^2}{2g} - \frac{p_m}{\gamma_{acqua}} =$$

$$25 + \left(0.018 \times \frac{20 + 400}{0.3} + 1.5 \right) \times \frac{1.13^2}{2 \times 9.806} - \frac{10^5}{9806} = 16.5 \text{ m}$$

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta} = \frac{9806 \times 0.08 \times 16.5}{0.75} = 17.3 \text{ kW}.$$

Esercizio 7.6

Nell'impianto di sollevamento in Figura 7.8 il serbatoio A è pressurizzato. Sono note le caratteristiche delle condotte, la potenza P della pompa e il suo rendimento η .

- Calcolare la portata convogliata.

◇ Dati numerici:

$\Delta H_g = (25 + C_{pu})$ m, $p_m = (1 + C_u \times 0.1)$ bar, $D_a = D_m = 300$ mm, $L_a = 20$ m, $L_m = 400$ m, $\lambda_a = 0.02$, $\lambda_m = 0.015$, $P = 17$ kW, $\eta = 0.75$.

Soluzione

Il bilancio di energia dell'impianto è il seguente:

$$\Delta H = \Delta H_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \frac{V_a^2}{2g} + \lambda_m \frac{L_m}{D_m} \frac{V_m^2}{2g} + \xi_{imb} \frac{V_a^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_m^2}{2g} - \frac{p_m}{\gamma_{acqua}}.$$

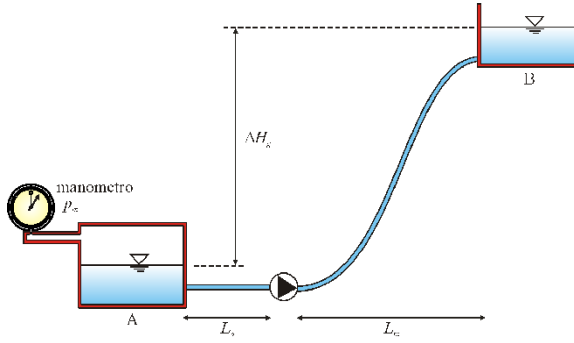


Figura 7.8. Impianto di sollevamento

In funzione della portata, l'equazione precedente si riscrive come segue:

$$\Delta H = \Delta H_g + \left(\lambda_a \frac{L_a}{D} + \lambda_m \frac{L_m}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right) \frac{Q^2}{2g} \frac{1}{(\pi D^2/4)^2} - \frac{p_m}{\gamma_{acqua}}.$$

La potenza all'asse della pompa è pari a:

$$P = \frac{\gamma_{acqua} Q \Delta H}{\eta}.$$

Sostituendo l'espressione della prevalenza totale in funzione della portata, si ottiene la seguente equazione di 3° grado, da risolvere preferibilmente numericamente per tentativi:

$$\begin{aligned} & \gamma_{acqua} \left(\lambda_a \frac{L_a}{D} + \lambda_m \frac{L_m}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right) \frac{Q^3}{2g} \frac{1}{(\pi D^2/4)^2} + \\ & + \gamma_{acqua} Q \left(\Delta H_g - \frac{p_m}{\gamma_{acqua}} \right) - \eta P = 0 \rightarrow \\ & 9806 \times \left(0.02 \times \frac{20}{0.3} + 0.015 \times \frac{400}{0.3} + 1.5 \right) \times \frac{Q^3}{2 \times 9.806} \times \frac{1}{(\pi \times 0.3^2/4)^2} + \\ & + 9806 \times Q \times \left(25 - \frac{1 \times 10^5}{9806} \right) - 0.75 \times 17\,000 = 0 \rightarrow \\ & 2\,284\,938 \times Q^3 + 145\,150 \times Q - 12\,750 = 0. \end{aligned}$$

L'unica soluzione fisicamente accettabile corrisponde alla portata $Q = 79.8$ l/s.

Esercizio 7.7

Nell'impianto in Figura 7.9 i due serbatoi sono alimentati da due condotte di lunghezza $L_{NB} = L_{NC} = 300$ m e diametro $D = 200$ mm. Le condotte sono di acciaio con scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.1$ mm. Le perdite di carico concentrate e le perdite di carico distribuite nei brevissimi tronchi di aspirazione e di mandata fino al nodo N possono essere trascurate.

- Calcolare la portata in ciascun serbatoio se la prevalenza della pompa è pari a $\Delta H = 26$ m.

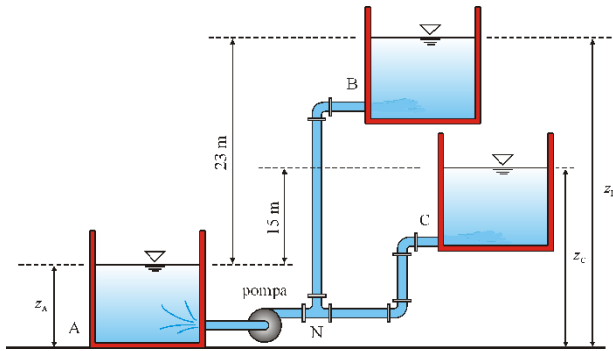


Figura 7.9. Impianto di sollevamento con serbatoi multipli

Soluzione

Sulle base delle ipotesi semplificative relative alle perdite di carico, a valle della pompa, in corrispondenza del nodo dal quale si diramano le due condotte, il carico è pari alla quota del serbatoio di alimentazione sommata alla prevalenza della pompa:

$$H_N = \Delta H + z_A.$$

Per la condotta NB vale la seguente equazione di bilancio (trascurando le perdite di carico concentrate):

$$\Delta H + z_A - z_B = \lambda_{NB} \frac{U_{NB}^2}{2g} \frac{L_{NB}}{D}.$$

Per la condotta NC risulta:

$$\Delta H + z_A - z_C = \lambda_{NC} \frac{U_{NC}^2}{2g} \frac{L_{NC}}{D}.$$

Assunto un valore dell'indice di resistenza asintotico per $\varepsilon/D = 5 \times 10^{-4}$ pari a $\lambda_{NB\infty} = 0.0170$, risulta:

$$U'_{NB} = \sqrt{\frac{2gD}{L_{NB}\lambda_{NB\infty}} (\Delta H + z_A - z_B)} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 0.2}{300 \times 0.0170} \times (26 - 23)} = 1.52 \text{ m/s.}$$

Il numero di Reynolds è pari a:

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{1.52 \times 0.2}{10^{-6}} = 304\,000.$$

L'indice di resistenza di seconda approssimazione è pari a $\lambda_{NB} = 0.0181$, al quale corrisponde una velocità in condotta:

$$U''_{NB} = \sqrt{\frac{2gD}{L_{NB}\lambda_{NB}} (\Delta H + z_A - z_B)} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 0.2}{300 \times 0.0181} \times (26 - 23)} = 1.47 \text{ m/s}$$

e una portata:

$$Q_{NB} = \frac{U''_{NB}\pi D^2}{4} = \frac{1.47 \times \pi \times 0.2^2}{4} = 46.2 \text{ l/s.}$$

Tra la prima e la seconda iterazione, la correzione della velocità è pari a $(1.52 - 1.47)/1.52 = 3.2\%$. Se l'approssimazione viene ritenuta sufficiente, ogni ulteriore iterazione è superflua. Per la condotta NC, assunto un valore dell'indice di resistenza asintotico per $\varepsilon/D = 5 \times 10^{-4}$, pari a $\lambda_{NC\infty} = 0.017$, risulta:

$$U'_{NC} = \sqrt{\frac{2gD}{L_{NC}\lambda_{NC\infty}} (\Delta H + z_A - z_C)} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 0.2}{300 \times 0.017} \times (26 - 15)} = 2.91 \text{ m/s.}$$

Il numero di Reynolds è pari a:

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.91 \times 0.2}{10^{-6}} = 582\,000.$$

L'indice di resistenza di seconda approssimazione è pari a $\lambda_{NC} = 0.0175$, al quale corrisponde una velocità in condotta:

$$U''_{NC} = \sqrt{\frac{2gD}{L_{NC}\lambda_{NC}} (\Delta H + z_A - z_C)} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 0.2}{300 \times 0.0175} \times (26 - 15)} = 2.87 \text{ m/s}$$

e una portata:

$$Q_{NC} = \frac{U''_{NC}\pi D^2}{4} = \frac{2.87 \times \pi \times 0.2^2}{4} = 90.1 \text{ l/s.}$$

Tra la prima e la seconda iterazione, la correzione della velocità è pari a $(2.91 - 2.87)/2.91 = 1.3\%$. Anche in questo caso ogni ulteriore iterazione è superflua. La portata totale in uscita dal serbatoio A è pari a:

$$Q_A = Q_{NC} + Q_{NB} = 90.1 + 46.2 = 136.3 \text{ l/s.}$$

Esercizio 7.8

Dell'acqua viene pompata da un lago in un serbatoio pressurizzato e quindi in due condotte di lunghezza $L_1 = 210$ m, $D_1 = 150$ mm e $L_2 = 360$ m, $D_2 = 125$ mm, secondo lo schema riportato in Figura 7.10. La scabrezza assoluta delle condotte è $\varepsilon = 0.1$ mm. La curva caratteristica della pompa ha la seguente espressione:

$$H_d = 13.5 + 305 \times Q - 22\,200 \times Q^2 \quad (H_d \text{ in m e } Q \text{ in m}^3/\text{s}).$$

Calcolare:

- la portata nelle condotte;
 - la potenza della pompa se il rendimento è costante ed è pari a $\eta = 0.6$.
- ◇ Trascurare le variazioni di quota geodetica e le perdite di carico concentrate, comprese le perdite allo sbocco. Anche le perdite distribuite nei brevissimi tronchi di aspirazione e di arrivo al serbatoio possono essere trascurate.

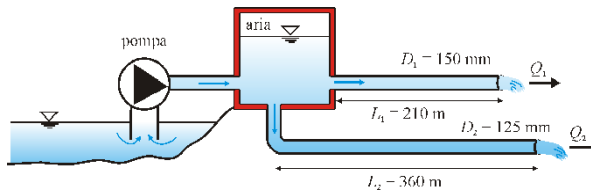


Figura 7.10. Impianto di sollevamento

Soluzione

La prevalenza della pompa serve a bilanciare le perdite di carico, uguali in ognuno dei due rami. È possibile scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} H_d = 13.5 + 305 \times Q - 22\,200 \times Q^2 \\ H_d = \frac{\lambda_1 Q_1 |Q_1|}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} \\ H_d = \frac{\lambda_2 Q_2 |Q_2|}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} \\ Q = Q_1 + Q_2. \end{cases}$$

Il valore dell'indice di resistenza di primo tentativo è il valore asintotico per $Re \rightarrow \infty$; per $\varepsilon/D_1 = 6.6 \times 10^{-4}$ risulta $\lambda_{1\infty} = 0.0178$. Per $\varepsilon/D_2 = 8 \times 10^{-4}$ risulta $\lambda_{2\infty} = 0.0185$.

Per la risoluzione manuale del sistema, conviene elaborarlo ulteriormente in modo da ridurlo ad una equazione in una sola incognita. Scegliendo come incognita principale Q_1 e introducendo i simboli:

$$\beta_1 = \frac{\lambda_1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\lambda_2}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2}.$$

si ottiene (eliminando l'operatore valore assoluto per la mancanza di ambiguità sul verso delle portate):

$$\begin{cases} H_d = \beta_1 Q_1^2 \\ H_d = \beta_2 Q_2^2. \end{cases}$$

Uguagliando e ricavando Q_2 in funzione di Q_1 si ottiene:

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}.$$

Eliminando H_d tra le prime due equazioni del sistema e inserendo l'equazione di continuità, il sistema è ridotto a:

$$\begin{cases} \beta_1 Q_1^2 = 13.5 + 305 \times (Q_1 + Q_2) - 22\,200 \times (Q_1 + Q_2)^2 \\ Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}. \end{cases}$$

Eliminando, infine, Q_2 tra le due equazioni, si ottiene una sola equazione nell'unica incognita Q_1 :

$$\beta_1 Q_1^2 = 13.5 + 305 \times Q_1 \left(1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right) - 22\,200 \times Q_1^2 \times \left(1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \right)^2.$$

L'equazione ottenuta è un'equazione algebrica di 2° grado che, introdotto il simbolo:

$$t_1 = 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

può essere risolta con la consueta formula risolutiva:

$$Q_1 = \frac{305 \times t_1 \pm \sqrt{305^2 \times t_1^2 + 4 \times 13.5 \times (22\,200 \times t_1^2 + \beta_1)}}{2 \times (22\,200 \times t_1^2 + \beta_1)}.$$

Delle due soluzioni, una sempre positiva e l'altra sempre negativa, si sceglierà la prima. Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\lambda_1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} = \frac{0.0178}{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.15^2/4)^2} \times \frac{210}{0.15} = 4069 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \\ \beta_2 &= \frac{\lambda_2}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} = \frac{0.0185}{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.125^2/4)^2} \times \frac{360}{0.125} = 18\,039 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \\ t_1 &= 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} = 1 + \sqrt{\frac{4069}{18\,039}} = 1.475.\end{aligned}$$

Si ottiene, infine:

$$\begin{cases} Q_1 = 0.021 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} = 0.021 \times \sqrt{\frac{4069}{18\,039}} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}. \end{cases}$$

Le velocità corrispondenti sono:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.021}{\pi \times 0.15^2} = 1.20 \text{ m/s} \\ V_2 &= \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.01}{\pi \times 0.125^2} = 0.8 \text{ m/s}\end{aligned}$$

e il numero di Reynolds è pari a:

$$\begin{aligned}\text{Re}_1 &= \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{1.20 \times 0.15}{10^{-6}} = 180\,000 \\ \text{Re}_2 &= \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{0.8 \times 0.125}{10^{-6}} = 100\,000.\end{aligned}$$

Gli indici di resistenza di seconda approssimazione risultano pari a $\lambda_1 = 0.0198$ e $\lambda_2 = 0.0215$. Di conseguenza, si calcola:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\lambda_1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} = \frac{0.0198}{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.15^2/4)^2} \times \frac{210}{0.15} = 4526 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \\ \beta_2 &= \frac{\lambda_2}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} = \frac{0.0215}{2 \times 9.806 \times (\pi \times 0.125^2/4)^2} \times \frac{360}{0.125} = 20\,965 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \\ t_1 &= 1 + \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} = 1 + \sqrt{\frac{4526}{20\,965}} = 1.465.\end{aligned}$$

Si ottiene, infine:

$$\begin{cases} Q_1 = 0.0209 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_2 = 0.0097 \text{ m}^3/\text{s}. \end{cases}$$

Le iterazioni successive non modificano significativamente il risultato.

La portata della pompa è $Q = Q_1 + Q_2 = 0.0307 \text{ m}^3/\text{s}$ con una prevalenza pari a $H_d = 1.98 \text{ m}$. La potenza richiesta è pari a:

$$P = \frac{\gamma Q H_d}{\eta} = \frac{9806 \times 0.0307 \times 1.98}{0.6} = 993 \text{ W}.$$

Esercizio 7.9

Nell'impianto idroelettrico in Figura 7.11 la portata Q è convogliata con un salto disponibile pari a $Y = (200 + 5 \times C_u) \text{ m}$. La condotta ha un tronco iniziale di lunghezza $L_1 = (400 + 10 \times C_{pu}) \text{ m}$, diametro $D_1 = 800 \text{ mm}$, scabrezza assoluta $\varepsilon_1 = 0.2 \text{ mm}$, e un tronco terminale di lunghezza $L_2 = (25 + C_u) \text{ m}$, diametro $D_2 = 800 \text{ mm}$ e scabrezza assoluta $\varepsilon_2 = 0.2 \text{ mm}$. L'imbocco e lo sbocco sono raccordati con un coefficiente di perdita pari a 0.06. Lo scarico avviene in un serbatoio dal quale la portata si allontana attraverso una luce sotto battente di altezza $a = 0.20 \text{ m}$ e larghezza $b = 1.0 \text{ m}$. La vena effluente ha un coefficiente di contrazione $C_c = 0.6$ e un coefficiente di velocità $C_v = 0.98$. La contrazione laterale è soppressa. A regime, il livello nel serbatoio di arrivo è pari a $h + a = 12.20 \text{ m}$. Determinare:

- la portata;
- la potenza ritraibile se il rendimento della turbina è $\eta_t = 0.80$;
- il ricavo annuo con un rendimento dell'alternatore $\eta_a = 0.92$, se il funzionamento è continuo e il prezzo di vendita dell'energia elettrica è pari a 0.08 Euro/kWh.

Soluzione

La portata può essere calcolata considerando il processo di efflusso dalla luce di fondo del serbatoio a valle. A regime, risulta:

$$Q = C_c C_v a b \sqrt{2g(h + a - C_c a)}.$$

L'equazione di bilancio dell'energia è la seguente:

$$Y - Q^2 \left(\lambda_1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \xi_{imb} \frac{1}{2g\Omega_1^2} + \xi_{sbocco} \frac{1}{2g\Omega_2^2} \right) - \Delta H = 0.$$

Y è il *salto naturale*, ΔH è il *salto utile* (o *salto motore*, corrispondente al dislivello effettivamente utilizzato dalla turbina).

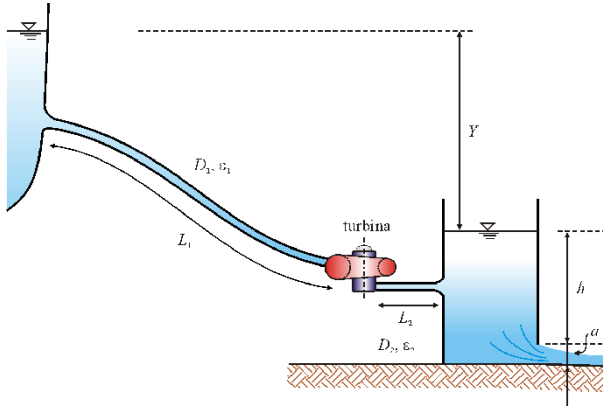


Figura 7.11. Impianto idroelettrico

La potenza all'asse della turbina è pari a:

$$P = \eta_t \gamma Q \Delta H.$$

La potenza elettrica generata è pari a:

$$P_{elettrica} = \eta_a P.$$

Il ricavo annuo è pari a:

$$R = P_{elettrica} T C_{en} / 1000$$

in cui $P_{elettrica}$ è espressa in Watt, il tempo di funzionamento T è in ore, C_{en} è il prezzo di vendita espresso in Euro/kWh.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$Y = 200$ m, $L_1 = 400$ m, $D_1 = 800$ mm, $\varepsilon_1 = 0.2$ mm, $L_2 = 25$ m, $D_2 = 800$ mm, $\varepsilon_2 = 0.2$ mm, $\xi_{imb} = \xi_{sbocco} = 0.06$, $a = 0.20$ m, $b = 1.0$ m, $C_c = 0.6$, $C_v = 0.98$, $h = 12$ m.

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0.8^2}{4} = 0.503 \text{ m}^2$$

$$Q = C_c C_v a b \sqrt{2g(h + a - C_c a)} =$$

$$0.6 \times 0.98 \times 0.20 \times 1.0 \times \sqrt{2 \times 9.806 \times (12 + 0.2 - 0.6 \times 0.2)} = 1.81 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La velocità media in condotta è pari a:

$$V = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 1.81}{\pi \times 0.8^2} = 3.60 \text{ m/s}.$$

Il numero di Reynolds è pari a:

$$\text{Re} = \frac{VD_1}{\nu} = \frac{3.60 \times 0.8}{10^{-6}} = 2.88 \times 10^6.$$

La scabrezza relativa è pari a:

$$\frac{\varepsilon_1}{D_1} = \frac{0.2}{800} = 2.5 \times 10^{-4}.$$

Dall'equazione di Colebrook-White (o dall'abaco di Moody) si calcola $\lambda = 0.0147$.

Il salto utile è pari a:

$$\Delta H = Y - Q^2 \left(\lambda_1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \xi_{imb} \frac{1}{2g\Omega_1^2} + \xi_{sbocco} \frac{1}{2g\Omega_2^2} \right) =$$

$$200 - 1.81^2 \times \left(\begin{array}{l} 0.0147 \times \frac{1}{2 \times 9.806 \times 0.503^2} \times \frac{400}{0.8} + \\ 0.0147 \times \frac{1}{2 \times 9.806 \times 0.503^2} \times \frac{25}{0.8} + \\ 0.06 \times \frac{1}{2 \times 9.806 \times 0.503^2} + 0.06 \times \frac{1}{2 \times 9.806 \times 0.503^2} \end{array} \right) = 194.8 \text{ m}$$

$$P = \eta_t \gamma Q \Delta H = 0.80 \times 9806 \times 1.81 \times 194.8 = 2.76 \text{ MW}$$

$$P_{elettrica} = \eta_a P = 0.92 \times 2.76 = 2.54 \text{ MW}$$

$$R = P_{elettrica} TC_{en} = 2544.7 \times 24 \times 365 \times 0.08 = 1.78 \text{ M}.$$

Esercizio 7.10

Nell'impianto idroelettrico in Figura 7.12 il salto di pressione a cavallo della turbina è pari a $\Delta p = (5 + C_{pu}/10)$ bar. Il salto naturale è pari a $Y = (70 + C_u)$ m.

Le condotte hanno lunghezza $L_1 = (2000 + 10 \times C_u)$ m, $L_2 = 200$ m, $L_3 = 100$ m, e diametro $D_1 = (500 + 10 \times C_u)$ mm, $D_2 = 300$ mm, $D_3 = 300$ mm. L'indice di resistenza delle condotte è pari a $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.015$.

Si calcoli:

- la portata convogliata;
- la potenza all'asse se il rendimento della turbina è del 98%;
- il rapporto tra la potenza teorica disponibile e quella effettivamente ritraibile dall'impianto a parità di portata.

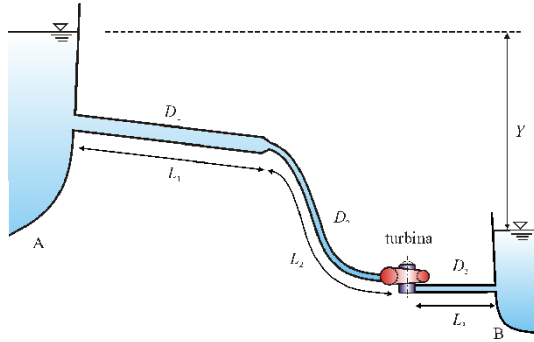


Figura 7.12. Impianto idroelettrico

Soluzione

Il carico a monte della turbina (trascurando le perdite concentrate), vale:

$$H_m = z_A - L_1 J_1 - L_2 J_2.$$

z_A è la quota del pelo libero del serbatoio A rispetto ad un riferimento esterno. Nella sezione a valle della turbina si ha, invece, il carico H_v :

$$H_v = z_B + L_3 J_3.$$

z_B è la quota del pelo libero del serbatoio B. La variazione di carico a cavallo della turbina è esprimibile come segue:

$$H_m - H_v = z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} - z_v - \frac{p_v}{\gamma} - \frac{V_3^2}{2g}.$$

Poiché risulta $z_m \simeq z_v$ e

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_3^2}{2g}$$

si calcola:

$$H_m - H_v = \frac{p_m}{\gamma} - \frac{p_v}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

che corrisponde al *salto utile* ΔH (o *salto motore*, dislivello effettivamente utilizzato dalla turbina).

In definitiva, trascurando le perdite di carico concentrate, il bilancio di energia dell'impianto è il seguente:

$$Y = Q^2 \left(\lambda_1 \frac{1}{2g\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{1}{2g\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \lambda_3 \frac{1}{2g\Omega_3^2} \frac{L_3}{D_3} \right) + \frac{\Delta p}{\gamma} \rightarrow$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g \left(Y - \frac{\Delta p}{\gamma} \right)}{\lambda_1 \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{1}{\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \lambda_3 \frac{1}{\Omega_3^2} \frac{L_3}{D_3}}}$$

$Y = z_A - z_B$ è il *salto naturale*.

La potenza all'asse della turbina è pari a:

$$P = \eta \gamma Q (\Delta p / \gamma).$$

La potenza teorica disponibile è pari a:

$$P_{teorica} = \gamma Q Y.$$

Il rapporto tra potenza teorica disponibile e la potenza ritraibile all'asse è pari a:

$$\frac{\gamma Q Y}{\eta \gamma Q (\Delta p / \gamma)} = \frac{\gamma Y}{\eta \Delta p}$$

e assume valore maggiore dell'unità.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$\Delta p = 5$ bar, $Y = 70$ m, $L_1 = 2000$ m, $L_2 = 200$ m, $L_3 = 100$ m, $D_1 = 500$ mm, $D_2 = 300$ mm, $D_3 = 300$ mm, $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0.015$.

$$Q = \sqrt{\frac{2g \left(Y - \frac{\Delta p}{\gamma} \right)}{\lambda_1 \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{1}{\Omega_2^2} \frac{L_2}{D_2} + \lambda_3 \frac{1}{\Omega_3^2} \frac{L_3}{D_3}}} =$$

$$\sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times \left(70 - \frac{5 \times 10^5}{9806} \right)}{0.02 \times \frac{16}{(\pi \times 0.5^2)^2} \times \frac{2000}{0.5} + 0.015 \frac{16}{(\pi \times 0.3^2)^2} \times \frac{200}{0.3} + 0.015 \times \frac{16}{(\pi \times 0.3^2)^2} \times \frac{100}{0.3}}}$$

$$= 0.271 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P = \eta \gamma Q (\Delta p / \gamma) = 0.98 \times 9806 \times 0.271 \times (5 \times 10^5 / 9806) = 132.8 \text{ kW}$$

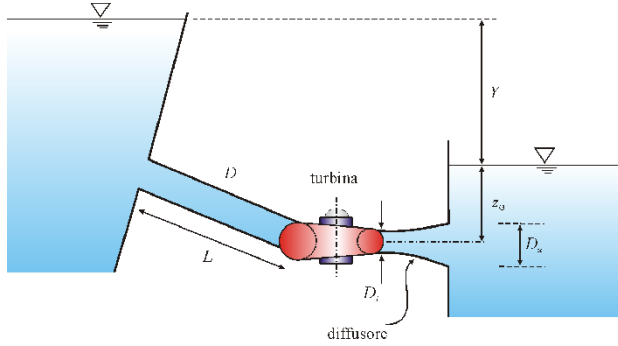
$$\frac{\gamma Y}{\eta \Delta p} = \frac{9806 \times 70}{0.98 \times 5 \times 10^5} = 1.40.$$

Esercizio 7.11

Nell'impianto in Figura 7.13 il salto disponibile è $Y = (100 + 5 \times C_u)$ m, la condotta è in acciaio di diametro $D = 800$ mm e lunghezza $L = (400 + 10 \times C_u)$ m. Il salto utile è $\Delta H = (30 + 5 \times C_{pu})$ m.

Il diffusore è ad asse orizzontale, con diametro di ingresso $D_i = D$ e diametro di uscita $D_u = 1.5 \times D$. L'affondamento del baricentro della sezione di uscita è $z_G = 12$ m. Calcolare:

- la portata Q ;
 - la potenza massima ritraibile con un rendimento $\eta = 0.85$;
 - la spinta sul diffusore trascurando il peso del fluido.
- ◇ Il fluido è acqua. Si trascurino le perdite di carico distribuite lungo il diffusore.

**Figura 7.13.** Impianto idroelettrico**Soluzione**

Il bilancio di energia, trascurando le perdite distribuite nel diffusore, è il seguente:

$$Y = \Delta H + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L}{D} + \xi_{imb} \frac{V^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_u^2}{2g}.$$

ΔH è il salto utile. La velocità allo sbocco si calcola sulla base dell'equazione di conservazione della massa:

$$V_u \frac{\pi D_u^2}{4} = V \frac{\pi D^2}{4} \rightarrow V_u = V \frac{D^2}{D_u^2}.$$

Per tubazioni in acciaio in servizio corrente con leggera ruggine, assumiamo una scabrezza omogenea equivalente $\varepsilon = 0.3$ mm. Il coefficiente di resistenza si calcola, per tentativi, facendo uso dell'abaco di Moody, oppure dell'equazione di Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right).$$

Essendo incognito Re , occorre formulare inizialmente l'ipotesi di moto turbolento pienamente sviluppato adottando come indice di resistenza il valore asintotico (equazione di Prandtl-Nikuradse):

$$\lambda_{\infty} = \left[-2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right) \right]^{-2}.$$

In corrispondenza di tale valore si ottiene una prima stima della velocità:

$$V = \sqrt{\frac{2g(Y - \Delta H)}{\left(\lambda_{\infty} \frac{L}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \frac{D^2}{D_u^2} \right)}}$$

con la quale si valuterà il numero di Reynolds e un valore di λ di successiva approssimazione. Reiterando il procedimento si perverrà al valore finale della velocità.

Assumendo di essere in moto turbolento pienamente sviluppato, si può adottare, in alternativa, la formula di Chezy con coefficiente di Gauckler-Strickler, riscrivendo l'equazione di bilancio dell'energia nella forma seguente:

$$Y = \Delta H + \left(\frac{1}{k^2 \left(\frac{D}{4} \right)^{4/3}} L + \frac{\xi_{imb}}{2g} + \frac{\xi_{sbocco}}{2g} \frac{D^2}{D_u^2} \right) V^2 \rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{Y - \Delta H}{\left(\frac{1}{k^2 \left(\frac{D}{4} \right)^{4/3}} L + \frac{\xi_{imb}}{2g} + \frac{\xi_{sbocco}}{2g} \frac{D^2}{D_u^2} \right)}}.$$

Per tubazioni in acciaio in servizio corrente con leggera ruggine, il coefficiente di Gauckler-Strickler si può assumere pari a $k = 100 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

La massima potenza ritraibile è pari a:

$$P = \gamma Q \Delta H \eta.$$

La spinta sul diffusore si calcola applicando il bilancio della quantità di moto al volume di controllo tratteggiato in Figura 7.14:

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{I} + \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}.$$

Nella direzione orizzontale, l'equazione si semplifica come segue:

$$\Pi_{0x} + \Pi_{1x} - \Pi_{2x} + M_{1x} - M_{2x} = 0$$

ovvero:

$$\Pi_{0x} = -p_{Gm}\Omega_m + p_{Gv}\Omega_v - \rho \frac{Q^2}{\Omega_m} + \rho \frac{Q^2}{\Omega_v}.$$

$\Pi_{0x} = -F_x$ è l'azione esercitata dal diffusore sul volume di controllo, uguale e contraria alla spinta F_x esercitata sul diffusore. Abbiamo assunto unitari i coefficienti correttivi del flusso di quantità di moto. Le pressioni si riferiscono al baricentro della sezione di monte e della sezione di valle, nell'ipotesi di traiettorie rettilinee e parallele e, quindi, di distribuzione idrostatica della pressione.

La pressione nella sezione di monte si calcola applicando il Teorema di Bernoulli ad una qualunque traiettoria tra la sezione di monte (sezione A) e la sezione di valle (sezione B):

$$z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_m^2}{2g} = z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{V_v^2}{2g}$$

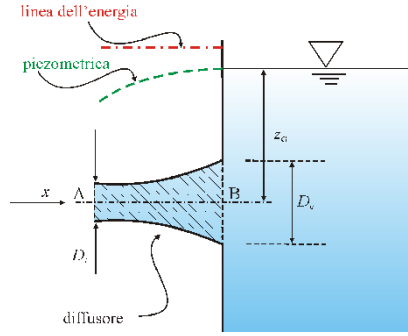


Figura 7.14. Schema per il calcolo della spinta sul diffusore

e, per una traiettoria che passi per i due baricentri:

$$p_{Gm} = p_{Gv} + \rho \frac{V_v^2}{2} - \rho \frac{V_m^2}{2} = p_{Gv} + \rho \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{\Omega_v^2} - \frac{1}{\Omega_m^2} \right).$$

La pressione nel baricentro a valle è pari a:

$$p_{Gv} = \gamma z_G.$$

A rigore, le forze di pressione sono applicate nei centri di spinta, più affondati rispetto ai baricentri, mentre i flussi di quantità di moto sono vettori baricentrici. La coppia residua è bilanciata da una opportuna distribuzione di pressione sulle pareti laterali.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$Y = 100$ m, $D = 800$ mm, $L = 400$ m, $\Delta H = 30$ m.

$$\Omega_m = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0.8^2}{4} = 0.502 \text{ m}^2$$

$$\Omega_v = \frac{\pi (1.5D)^2}{4} = \frac{\pi \times 1.2^2}{4} = 1.131 \text{ m}^2.$$

Il primo valore di V si calcola con $\lambda_\infty = 0.0157$ ottenendo (assunti $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 0.06$) $V = 12.54$ m/s. Affinando il calcolo, dopo alcune iterazioni, si perviene a $\lambda = 0.016$ e $V = 12.52$ m/s. Si calcola, quindi, $Q = 6.29$ m³/s. Inoltre:

$$P = \gamma Q \Delta H \eta = 9806 \times 6.29 \times 30 \times 0.85 = 1.57 \text{ MW}.$$

La pressione nel baricentro a valle è pari a:

$$p_{Gv} = \gamma z_G = 9806 \times 12 = 1.176 \text{ bar}.$$

La pressione a monte è pari a:

$$p_{Gm} = p_{Gv} + \rho \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{\Omega_v^2} - \frac{1}{\Omega_m^2} \right) =$$

$$117\,600 + 1000 \times \frac{6.29^2}{2} \left(\frac{1}{1.131^2} - \frac{1}{0.502^2} \right) = 0.553 \text{ bar}$$

ed è minore della pressione di valle.

La spinta orizzontale sul diffusore è pari a:

$$F_x = -\Pi_{0x} = p_{Gm}\Omega_m - p_{Gv}\Omega_v + \rho \frac{Q^2}{\Omega_m} - \rho \frac{Q^2}{\Omega_v} =$$

$$55\,280 \times 0.502 - 117\,600 \times 1.131 + 1000 \times \frac{6.29^2}{0.502} - 1000 \times \frac{6.29^2}{1.131} = -61.87 \text{ kN}$$

ed è diretta verso sinistra.

Risultati simili si ottengono calcolando la portata con la formula di Chezy.

Esercizio 7.12

L'impianto in Figura 7.15 è realizzato con una condotta di diametro $D = (200 + 10 \times C_{pu})$ mm e scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.2$ mm. La portata è pari a $Q = (50 + 2 \times C_u)$ l/s. I tronchi di condotta hanno, rispettivamente, lunghezza $L_1 = (400 + 10 \times C_u)$ m, $L_2 = (300 + 20 \times C_u)$ m, $L_3 = 30$ m. Le quote geodetiche della pompa, del vertice della condotta, della turbina e del pelo libero del serbatoio finale, sono pari a $z_P = 25$ m, $z_v = 250$ m, $z_T = 16$ m, $z_s = 15$ m. La pompa ha rendimento $\eta_P = 0.85$ e la turbina ha rendimento $\eta_T = 0.75$. La pressione a monte della pompa è pari a $p_m = 1.5$ bar.

- Dimensionare la pompa in modo che, nel vertice V, la pressione sia pari a $p_v = 0.5$ bar.
 - Calcolare la massima potenza ritraibile dalla turbina.
 - Disegnare la piezometrica e la linea dei carichi totali.
- ◇ Il fluido è acqua. Trascurare le perdite di carico concentrate, fatta eccezione per la perdita di sbocco nel serbatoio.

Soluzione

Per calcolare la potenza della pompa, dobbiamo calcolare la prevalenza H_d necessaria a soddisfare la condizione imposta nel vertice. Dal bilancio di energia

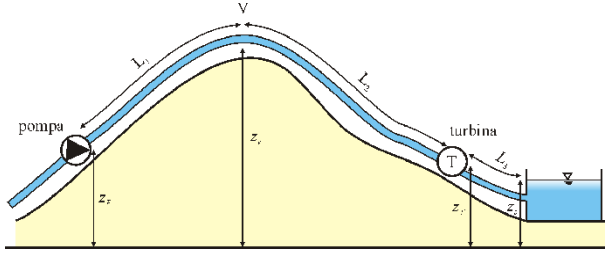


Figura 7.15. Impianto con pompa e turbina

risulta:

$$z_P + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + H_d = z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_1}{D}.$$

La velocità media in condotta è pari a:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

e il coefficiente di resistenza si calcola dall'abaco di Moody o dall'equazione di Colebrook-White.

La potenza della pompa è pari a:

$$P_P = \frac{\gamma Q H_d}{\eta_p}.$$

Il salto utile, pari al dislivello tra il carico a monte e a valle della turbina, è pari a:

$$\Delta H = \underbrace{z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_2}{D}}_{\text{carico a monte della turbina}} - \underbrace{\left(z_s + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_3}{D} + \frac{V^2}{2g} \right)}_{\text{carico a valle della turbina}}.$$

La potenza ritraibile dalla turbina è pari a:

$$P_T = \eta_T \gamma Q \Delta H.$$

La linea piezometrica e la linea dei carichi totali sono riportate in Figura 7.16.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$D = 200$ mm, $Q = 50$ l/s, $L_1 = 400$ m, $L_2 = 300$ m, $L_3 = 30$ m.

La velocità media in condotta è pari a:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 50 \times 10^{-3}}{\pi \times 0.2^2} = 1.6 \text{ m/s}.$$

Il numero di Reynolds vale:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{1.6 \times 0.2}{10^{-6}} = 320\,000.$$

Dall'abaco di Moody, per $\varepsilon/D = 0.2/200 = 10^{-3}$ risulta $\lambda = 0.0205$.

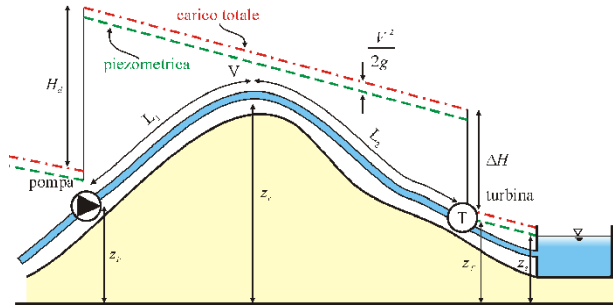


Figura 7.16. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

La prevalenza richiesta è pari a:

$$H_d = z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_1}{D} - \left(z_P + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \right) =$$

$$250 + \frac{0.5 \times 10^5}{9806} + 0.0205 \times \frac{1.6^2}{2 \times 9.806} \times \frac{400}{0.2} - \left(25 + \frac{1.5 \times 10^5}{9806} \right) = 220.15 \text{ m.}$$

La potenza della pompa deve essere pari a:

$$P_P = \frac{\gamma Q H_d}{\eta_p} = \frac{9806 \times 0.05 \times 220.15}{0.85} = 127.0 \text{ kW.}$$

Il salto utile è pari a:

$$\Delta H = \underbrace{z_v + \frac{p_v}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}}_{\text{carico a monte della turbina}} - \underbrace{\lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_2}{D} - \left(z_s + \lambda \frac{V^2}{2g} \frac{L_3}{D} + \frac{V^2}{2g} \right)}_{\text{carico a valle della turbina}} =$$

$$250 + \frac{0.5 \times 10^5}{9806} - 0.0205 \times \frac{1.6^2}{2 \times 9.806} \times \frac{300}{0.2} -$$

$$- \left(15 + 0.0205 \times \frac{1.6^2}{2 \times 9.806} \times \frac{30}{0.2} \right) = 235.72 \text{ m.}$$

La potenza ritraibile dalla turbina è pari a:

$$P_T = \eta_T \gamma Q \Delta H = 0.75 \times 9806 \times 0.05 \times 235.7 = 86.7 \text{ kW.}$$

Questo tipo di impianto viene spesso utilizzato per adduttrici che devono superare un colle con un forte dislivello: l'energia prodotta dalla turbina alimenta, in parte, la pompa, riducendo i costi di esercizio.

Esercizio 7.13

Nell'impianto in Figura 7.17 il salto disponibile è $Y = (100 + 5 \times C_u)$ m, le condotte sono in acciaio di diametro $D = 800$ mm e lunghezza $L_1 = (400 + 10 \times C_u)$ m e $L_2 = (100 + 8 \times C_u)$ m. Il salto utile è $\Delta H = (30 + 5 \times C_{pu})$ m.

- Calcolare la portata Q .
- Calcolare la potenza massima ritraibile con un rendimento $\eta = 0.85$.
- Tracciare la piezometrica e la linea dei carichi totali.

◇ Il fluido è acqua. Si assuma $\xi_{imb} = 0.5$, $\xi_{sbocco} = 1.0$.

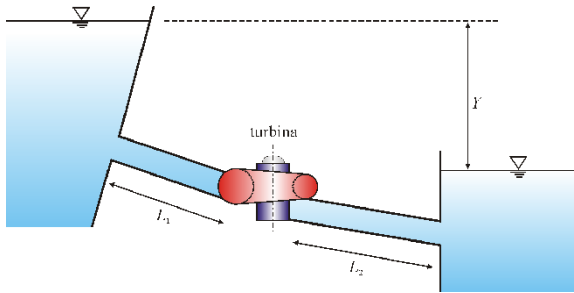


Figura 7.17. Impianto idroelettrico

Soluzione

Il bilancio di energia dell'impianto è il seguente:

$$Y = \Delta H + \lambda_1 \frac{V_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{V_2^2}{2g} \frac{L_2}{D_1} + \xi_{imb} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{sbocco} \frac{V_2^2}{2g}.$$

ΔH è il salto utile. Se il diametro delle condotte è uniforme, l'equazione di bilancio si riconduce alla forma seguente:

$$Y = \Delta H + \left(\lambda \frac{L_1 + L_2}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right) \frac{V^2}{2g}.$$

Per tubazioni in acciaio in servizio corrente con leggera ruggine, assumiamo una scabrezza omogenea equivalente $\varepsilon = 0.3$ mm. Il coefficiente di resistenza si calcola, per tentativi, facendo uso dell'abaco di Moody, oppure dell'equazione di Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right).$$

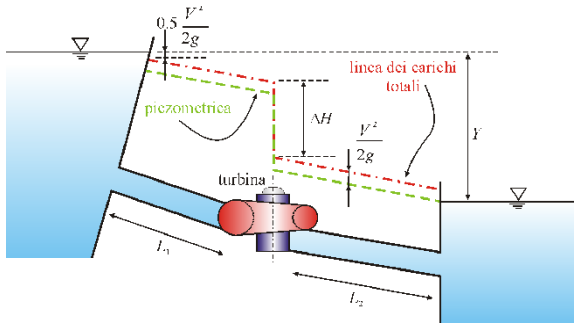


Figura 7.18. Andamento della piezometrica e della linea dei carichi totali

Essendo incognito Re , occorre formulare inizialmente l'ipotesi di moto turbolento pienamente sviluppato adottando come indice di resistenza il valore asintotico:

$$\lambda_{\infty} = \left[-2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right) \right]^{-2}.$$

In corrispondenza di tale valore si ottiene una prima stima della velocità:

$$V = \sqrt{\frac{2g(Y - \Delta H)}{\left(\lambda_{\infty} \frac{L_1 + L_2}{D} + \xi_{imb} + \xi_{sbocco} \right)}}$$

con la quale si valuterà il numero di Reynolds e un valore di λ di successiva approssimazione. Reiterando il procedimento si perverrà al valore finale della velocità.

Assumendo di essere in moto turbolento pienamente sviluppato, si può adottare, in alternativa, la formula di Manning, riscrivendo l'equazione di bilancio dell'energia nella forma seguente:

$$Y = \Delta H + \left[\frac{1}{k^2 (D/4)^{4/3}} (L_1 + L_2) + \frac{\xi_{imb} + \xi_{sbocco}}{2g} \right] V^2.$$

Per tubazioni in acciaio in servizio corrente con leggera ruggine, il coefficiente di Gauckler-Strickler si può assumere pari a $k = 100 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

La massima potenza ritraibile è pari a:

$$P = \gamma Q \Delta H \eta.$$

La piezometrica è riportata in Figura 7.18.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

1) applicando la formula di Colebrook-White

$$\lambda = 0.0157, V = 11.0 \text{ m/s}, Q = 5.53 \text{ m}^3/\text{s}, P = 1.384 \text{ MW};$$

2) applicando Manning-Gauckler-Strickler

$$V = 11.79 \text{ m/s}, Q = 5.92 \text{ m}^3/\text{s}, P = 1.481 \text{ MW}.$$

Esercizio 7.14

La piccola turbina in Figura 7.19 estrae 340 W dalla corrente idrica. Le condotte sono in acciaio con scabrezza assoluta $\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$ e il salto naturale è pari a $Y = 20 \text{ m}$.

- Calcolare la portata in uscita.
- ◇ Si assuma un rendimento della turbina pari a $\eta = 0.85$. Il coefficiente di perdita all'imbocco è pari a $\xi_{imb} = 0.5$.

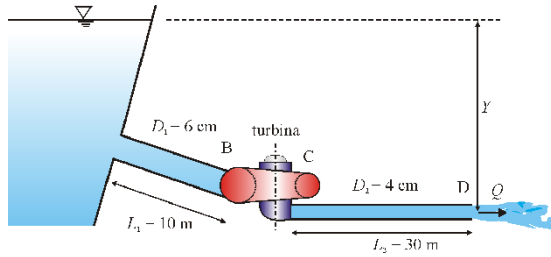


Figura 7.19. Impianto idroelettrico

Soluzione

La potenza della turbina è pari a:

$$P = \gamma Q (H_B - H_C) \eta$$

con $H_B - H_C$ il salto utile, pari alla variazione di carico totale tra monte e valle della turbina. Il bilancio di energia dell'impianto tra il serbatoio e la sezione di efflusso D si può scrivere come segue:

$$Y - \xi_{imb} \frac{U_1^2}{2g} - \lambda_1 \frac{U_1^2}{2g} \frac{L_1}{D_1} - (H_B - H_C) - \lambda_2 \frac{U_2^2}{2g} \frac{L_2}{D_2} - \frac{U_2^2}{2g} = 0$$

e, in funzione della portata:

$$\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{\xi_{imb}}{\Omega_1^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{\Omega_2^2} \right) = Y - (H_B - H_C).$$

ovvero, sostituendo l'espressione del salto utile in funzione della potenza:

$$\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{\xi_{imb}}{\Omega_1^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{\Omega_2^2} \right) = Y - \frac{P}{\gamma Q \eta}.$$

Riordinando i vari termini, si ottiene un'equazione cubica nella portata:

$$\frac{Q^3}{2g} \left(\frac{\xi_{imb}}{\Omega_1^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{\Omega_2^2} \right) - YQ + \frac{P}{\gamma \eta} = 0.$$

Tale equazione può essere adimensionalizzata rispetto alla portata di moto permanente in assenza di turbina, che è pari a:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2gY}{\left(\frac{\xi_{imb}}{\Omega_1^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{1}{\Omega_2^2} \right)}}$$

assumendo la seguente espressione:

$$\frac{Q^3}{Q_0^3} - \frac{Q}{Q_0} + \frac{P}{\gamma Q_0 Y \eta} = 0 \rightarrow Q^{*3} - Q^* + \frac{P}{\gamma Q_0 Y \eta} = 0.$$

Il simbolo * indica la variabile adimensionale.

L'equazione cubica ammette una soluzione analitica, con tre radici. La natura delle radici dipende dal segno del determinante di Vandermonde:

$$\frac{\left(\frac{P}{\gamma Q_0 Y \eta} \right)^2}{4} - \frac{1}{27}.$$

Se il determinante è positivo, l'equazione ammette una radice reale e due radici complesse coniugate; se è nullo, l'equazione ammette una radice reale semplice e una radice reale doppia; se è negativo, l'equazione ammette tre radici reali distinte. Il segno del determinante è riconducibile alla disequazione seguente:

$$P \equiv P_{crit} \leq \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma Q_0 Y \eta.$$

Le tre soluzioni, parametriche rispetto a P/P_{crit} , sono diagrammate in Figura 7.20. Nel nostro caso, la portata di moto permanente in assenza di turbina si calcola iterativamente ed è pari a $Q_0 = 5.86$ l/s, con $\lambda_1 = 0.0208$ e $\lambda_2 = 0.0217$ e risulta:

$$P_{crit} = \frac{2}{\sqrt{27}} \gamma Q_0 Y \eta = \frac{2}{\sqrt{27}} \times 9806 \times 0.00586 \times 20 \times 0.85 = 376 \text{ W}.$$

Poiché $P = 340$ W è minore di P_{crit} , l'equazione avrà tre radici reali distinte. Si può dimostrare che una radice è sempre negativa e le altre due sono sempre positive.

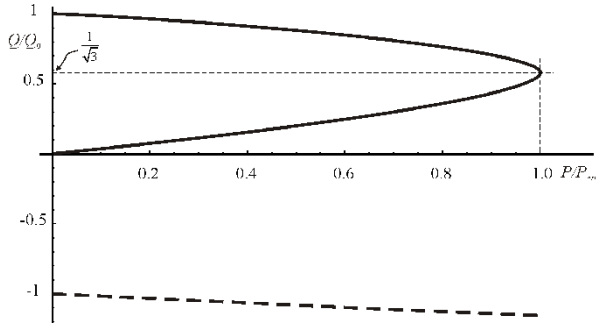


Figura 7.20. Soluzioni reali dell'equazioni cubica

Per il caso in esame, le due portate possibili sono, rispettivamente, $Q_1 = 4.4$ l/s, con $\lambda_1 = 0.0217$ e $\lambda_2 = 0.0222$ e $Q_2 = 2.5$ l/s, con $\lambda_1 = 0.0231$ e $\lambda_2 = 0.0231$.

Il rapporto tra la potenza sottratta alla corrente dalla turbina (escluso il rendimento idraulico della turbina) e la potenza massima della corrente in moto permanente di pari portata, è pari a:

$$\frac{P/\eta}{\gamma Q Y}.$$

Nel primo caso il rendimento è pari a:

$$\frac{P/\eta}{\gamma Q_1 Y} = \frac{340/0.85}{9806 \times 0.044 \times 20} = 48.5\%$$

nel secondo caso è pari a:

$$\frac{P/\eta}{\gamma Q_2 Y} = \frac{340/0.85}{9806 \times 0.025 \times 20} = 82.0\%.$$

Naturalmente sarà privilegiato il secondo punto di funzionamento dell'impianto.

La massima potenza ritraibile è P_{crit} con un rendimento pari a:

$$\frac{P_{crit}/\eta}{\gamma Q_{crit} Y} = \frac{\frac{2}{\sqrt{27}} \gamma Q_0 Y}{\gamma \frac{Q_0}{\sqrt{3}} Y} = 66.7\%.$$

Si può anche dimostrare che se $P > P_{crit}$ l'unica soluzione reale è negativa ed è, quindi, fisicamente inammissibile.

Transitori idraulici

Esercizio 8.1

Il sifone in Figura 8.1 è una condotta con scabrezza di Gauckler-Strickler $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Le condotte hanno lunghezza $L_{AB} = 4 \text{ m}$, $L_{BC} = 3 \text{ m}$, $L_{CD} = 8 \text{ m}$, $L_{DE} = 3.5 \text{ m}$, $L_{EF} = 2 \text{ m}$ e diametro $D = 300 \text{ mm}$.

- Calcolare il tempo necessario per il riempimento del serbatoio 2.
- ◇ Si assuma un coefficiente di perdita all'imbocco e allo sbocco unitario e un coefficiente di perdita per ogni deviazione pari a 0.1. Il fluido è acqua alla temperatura di 20°C , con tensione di vapore pari a 2314 Pa .

Soluzione

Supponiamo che inizialmente la pressione assoluta nel vertice C sia maggiore della tensione di vapore. Il moto è a canna piena, cioè tutta la sezione della condotta è occupata dalla corrente. Applicando il bilancio di energia, risulta:

$$z_1 - z_s = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \sum \xi_i + \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2} Q^2 D^{-5.33} \sum L_i$$

con $z_1 = z_{f1} + h_1$.

Inserendo il simbolo:

$$\beta = \sum \frac{\xi_i}{2g\Omega^2} + \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2} D^{-5.33} \sum L_i$$

si può scrivere, in forma più compatta:

$$z_1 - z_s = \beta Q^2$$

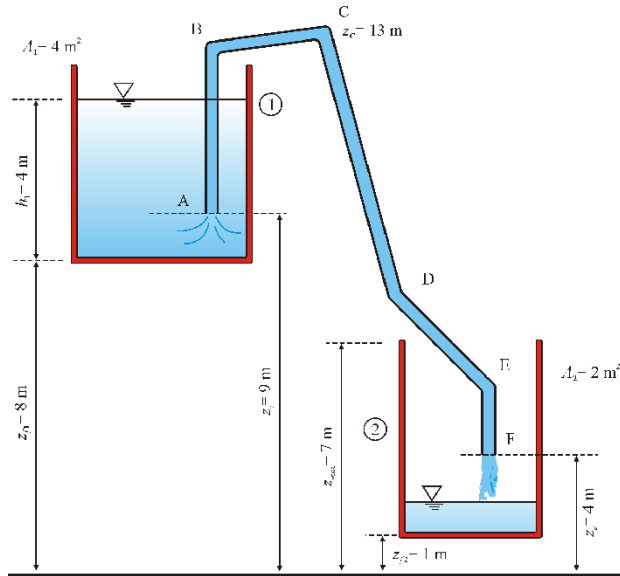


Figura 8.1. Sifone tra due serbatoi

e invertendo:

$$Q = \sqrt{\frac{z_1 - z_s}{\beta}}.$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\beta = 2.4 \times \frac{1}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 0.3^2}{4} \right)^2} + \frac{4^{10/3}}{\pi^2 \times 90^2} \times 0.3^{-5.33} \times 20.5 = 40.44 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5}.$$

La portata iniziale è pari a:

$$Q = \sqrt{\frac{z_1 - z_s}{\beta}} = \sqrt{\frac{8 + 4 - 4}{40.44}} = 0.445 \text{ m}^3/\text{s}$$

con una velocità media in condotta pari a:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.445}{\pi \times 0.3^2} = 6.3 \text{ m/s.}$$

La pressione nel vertice C si calcola applicando il Teorema di Bernoulli generalizzato per una traiettoria che parte in quiete dal serbatoio 1:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V^2}{2q} + (\xi_{imb} + \xi_{curva}) \frac{V^2}{2q} + \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2} \Omega^2 V^2 D^{-5.33} (L_{AB} + L_{BC})$$

e, quindi:

$$p_C = \gamma \left[z_{f1} + h_1 - z_C - \frac{V^2}{2g} - (\xi_{imb} + \xi_{curva}) \frac{V^2}{2g} - \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k^2} \Omega^2 V^2 D^{-5.33} (L_{AB} + L_{BC}) \right]$$

$$p_C = 9806 \times \left[8 + 4 - 13 - \frac{6.3^2}{2 \times 9.806} - (1 + 0.1) \times \frac{6.3^2}{2 \times 9.806} - \frac{4^{10/3}}{\pi^2 \times 90^2} \times \left(\frac{\pi \times 0.3^2}{4} \right)^2 \times 6.3^2 \times 0.3^{-5.33} \times (4 + 3) \right]$$

$$= -62\,060 \text{ Pa.}$$

La pressione assoluta in C è pari a:

$$p_C^* = p_{atm}^* + p_C = 101\,300 - 62\,060 = 39\,240 \text{ Pa} > 2314 \text{ Pa.}$$

Tale pressione è maggiore della tensione di vapore e, quindi, è verificata l'ipotesi iniziale di funzionamento del sifone a canna piena.

Dall'equazione di conservazione della massa nel serbatoio 1 risulta:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{\frac{z_1 - z_s}{\beta}}.$$

Introducendo la variabile $\zeta_1 = z_1 - z_s$ risulta:

$$A_1 \frac{d\zeta_1}{dt} = -\sqrt{\frac{\zeta_1}{\beta}} = -k\zeta_1^{1/2}$$

con $k = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{40.44}} = 0.157 \frac{\text{m}^{5/2}}{\text{s}}$, che integrata, conduce alla seguente relazione:

$$\int_{\zeta_1(t_0)}^{\zeta_1(t)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^{1/2}} = -\frac{k}{A_1} \int_{t_0}^t dt \rightarrow 2\zeta_1^{1/2} \Big|_{\zeta_1(t_0)}^{\zeta_1(t)} = \frac{-k}{A_1} t \Big|_{t_0}^t \rightarrow$$

$$t - t_0 = -\frac{2A_1}{k} \left(\sqrt{\zeta_1(t)} - \sqrt{\zeta_1(t_0)} \right).$$

Il processo di efflusso si modifica quando la sezione di sbocco del sifone diventa sommersa (condizione limite di sommergenza), a causa dell'innalzarsi del livello nel serbatoio 2. Ciò avviene quando è stato trasferito un volume d'acqua pari a:

$$W = A_2 (z_s - z_{f2}) = 2 \times (4 - 1) = 6 \text{ m}^3$$

corrispondente ad un abbassamento di livello nel serbatoio 1 pari a:

$$\Delta h = W/A_1 = 6/4 = 1.5 \text{ m.}$$

Quindi, risulta:

$$\zeta_1(t_0) = z_1 - z_s \equiv z_{f1} + h_1 - z_s = 8 + 4 - 4 = 8 \text{ m}$$

$$\zeta_1(t) = z'_1 - z_s \equiv z_{f1} + h_1 - \Delta h - z_s = 8 + 4 - 1.5 - 4 = 6.5 \text{ m.}$$

Sostituendo i valori numerici, si calcola:

$$t - t_0 = -\frac{2A_1}{k} \left(\sqrt{\zeta_1(t)} - \sqrt{\zeta_1(t_0)} \right) = -\frac{2 \times 4}{0.1571} \times \left(\sqrt{6.5} - \sqrt{8} \right) = 14.2 \text{ s.}$$

Superato il limite di sommergenza, il carico disponibile sarà pari alla differenza tra i livelli dei due serbatoi e l'equazione di bilancio dell'energia è la seguente:

$$z_1 - z_2 = \beta Q^2 \rightarrow Q = \sqrt{\frac{z_1 - z_2}{\beta}}.$$

L'equazione di conservazione della massa richiede che:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{\frac{z_1 - z_2}{\beta}} = -k\sqrt{z_1 - z_2}.$$

I livelli del pelo libero dei serbatoi sono legati dalla relazione seguente:

$$A_1 dz_1 = -A_2 dz_2$$

e, integrando:

$$z_2 = -\frac{A_1}{A_2} z_1 + \text{cost.}$$

L'equazione di conservazione della massa si può riscrivere come segue:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = -k\sqrt{z_1(1 + A_1/A_2) - \text{cost}} \equiv -k\sqrt{(z_{f1} + h_1)(1 + A_1/A_2) - \text{cost}}.$$

Introducendo la variabile ausiliaria:

$$\xi_1 = (z_{f1} + h_1)(1 + A_1/A_2) - \text{cost}$$

differenziando, risulta:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{dh_1}{dt} (1 + A_1/A_2)$$

e sostituendo:

$$\frac{A_1}{(1 + A_1/A_2)} \frac{d\xi_1}{dt} = -k\sqrt{\xi_1}.$$

L'integrazione può essere condotta come nel caso precedente, pervenendo alla seguente legge di variazione del livello nel serbatoio 1:

$$t - t_0 = -\frac{2A_1}{k(1 + A_1/A_2)} \left(\sqrt{\xi_1(t)} - \sqrt{\xi_1(t_0)} \right).$$

Esercizio 8.2

Una condotta in pressione in acciaio, alimentata da un serbatoio a livello costante e terminante con un otturatore con efflusso in atmosfera, ha le caratteristiche costruttive riportate in Figura 8.2. Il diametro è pari a $D = (1000 + 10 \times C_{pu})$ mm, lo spessore è $\delta = 12$ mm, la lunghezza è pari a $L = 2000$ m.

Partendo da una situazione permanente con carico riferito al piano della luce di efflusso pari a $h_0 = (400 + 10 \times C_u)$ m e portata $Q = 2$ m³/s, si assegna una manovra di chiusura lineare, completa in $\tau = 4(2L/c)$.

Facendo uso delle equazioni concatenate di Allievi, per tutta la durata della manovra e per una fase successiva determinare:

- il carico nella sezione di sbocco negli istanti di fase intera e negli istanti di metà fase, raccogliendo i risultati in un diagramma;
 - confrontare il valore del massimo sovraccarico con quello dato dalla formula di Michaud-Allievi;
 - costruire, inoltre, il diagramma del carico che si verifica nella sezione della condotta di ascissa $L/2$.
- ◇ Assumere il modulo di comprimibilità isoentropico dell'acqua $\varepsilon = 2.0 \times 10^9$ Pa, il modulo di Young dell'acciaio $E = 2.07 \times 10^{11}$ Pa. Trascurare le perdite di carico.

Soluzione

Assumendo $C_u = C_{pu} = 0$, risulta $D = 1000$ mm e $h_0 = 400$ m.

La velocità media in condotta, in moto permanente, è pari a:

$$U_0 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 2}{\pi \times 1.0^2} = 2.55 \text{ m/s}.$$

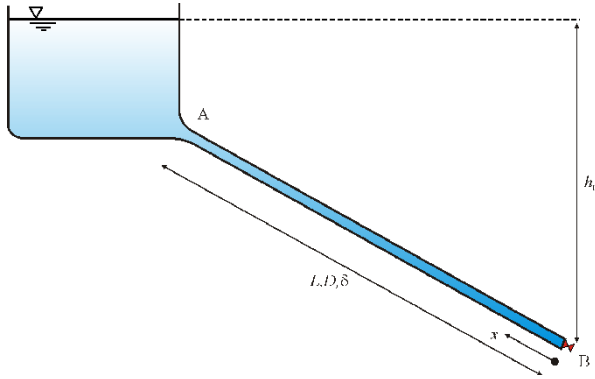


Figura 8.2. Serbatoio e condotta con otturatore

La celerità relativa della perturbazione per condotta circolare cilindrica a funzionamento membranale, di materiale elastico lineare, è pari a:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \varsigma \frac{\varepsilon}{E} \frac{D}{\delta}}}.$$

ς è un parametro adimensionale che tiene conto del tipo di vincolo della condotta e assume le seguenti espressioni:

$\varsigma = 5/4 - \nu \rightarrow$ per condotta ancorata a monte e libera di deformarsi longitudinalmente

$\varsigma = 1 - \nu^2 \rightarrow$ per condotta a deformazione longitudinale impedita

$\varsigma = 1 \rightarrow$ per condotta a deformazione longitudinale libera

ν è il coefficiente di Poisson del materiale della condotta. Assumendo che sia verificata l'ultima condizione, la celerità è pari a:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \varsigma \frac{\varepsilon}{E} \frac{D}{\delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.0 \times 10^9}{1000}}}{\sqrt{1 + 1 \times \frac{2.0 \times 10^9}{2.07 \times 10^{11}} \times \frac{1.0}{0.012}}} = 1053 \text{ m/s}.$$

La durata di fase della condotta nella sezione dell'otturatore è pari a:

$$\theta = \frac{2L}{c} = \frac{2 \times 2000}{1053} = 3.8 \text{ s}.$$

Poiché $\tau > \theta$ la manovra è lenta. Il grado di apertura agli istanti di ritmo intero e semi-intero è riportato in Tabella 8.1.

Le equazioni concatenate di Allievi hanno la seguente espressione:

$$z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2Al(\eta_{i-1}z_{i-1} - \eta_i z_i).$$

Tabella 8.1. Grado di apertura agli istanti di ritmo intero e semi-intero

t/θ	η
1.0	0.75
2.0	0.50
3.0	0.25
4.0	0
5.0	0
0.5	0.875
1.5	0.625
2.5	0.375
3.5	0.125
4.5	0

Al è il numero di Allievi definito come segue:

$$Al = \frac{U_0 c}{2gh_0}$$

inoltre $z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$, $\eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$, $z_0 = 1$, $\eta_0 = 1$.

Per il caso in esame risulta:

$$Al = \frac{U_0 c}{2gh_0} = \frac{2.55 \times 1053}{2 \times 9.806 \times 400} = 0.3418.$$

Scegliamo l'istante $0 < t_1 \leq \theta$ con $t_1 = \theta$; quindi $t_2 = t_1 + \theta = 2\theta$, $t_3 = t_2 + \theta = 3\theta$, $t_4 = t_3 + \theta = 4\theta$, $t_5 = t_4 + \theta = 5\theta$. Il grado di apertura si può calcolare dalla legge di chiusura lineare (*dell'otturatore*):

$$\eta = 1 - \frac{t}{\tau} \text{ per } 0 \leq t \leq \tau$$

$$\eta = 0 \text{ per } t > \tau.$$

Considerando la serie di istanti di ritmo intero, all'istante t_1 l'equazione di Allievi diventa:

$$z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2Al(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \rightarrow z_1^2 + 1 - 2 = 2 \times 0.3418 \times (1 - 0.75 \times z_1)$$

$$z_1^2 + 0.5127 \times z_1 - 1.6836 = 0$$

che ammette due soluzioni, delle quali quella fisicamente accettabile è $z_1 = 1.0663$.

All'istante t_2 l'equazione di Allievi diventa:

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2Al(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2) \rightarrow$$

$$z_2^2 + 1.0663^2 - 2 = 2 \times 0.3418 \times (0.75 \times 1.0663 - 0.5 \times z_2) \rightarrow$$

$$z_2^2 + 0.3418 z_2 - 1.4097 = 0$$

che ammette la soluzione fisicamente accettabile $z_2 = 1.0287$.

Analoga procedura si applica per il calcolo agli istanti di ritmo semi-intero.

Tabella 8.2. Risultati del calcolo nella sezione di sbocco

t/θ	z	$\frac{h(t/\theta, 0)}{h_0}$	$h(t/\theta, 0)(\text{m})$
1	1.0663	1.1369	454.8
2	1.0287	1.0581	423.3
3	1.0550	1.1131	445.2
4	1.0330	1.0672	426.9
5	0.9658	0.9328	373.1
0.5	1.0325	1.0660	426.4
1.5	1.0502	1.1029	441.1
2.5	1.0390	1.0795	431.8
3.5	1.0475	1.0973	438.9
4.5	0.9961	0.9922	396.9

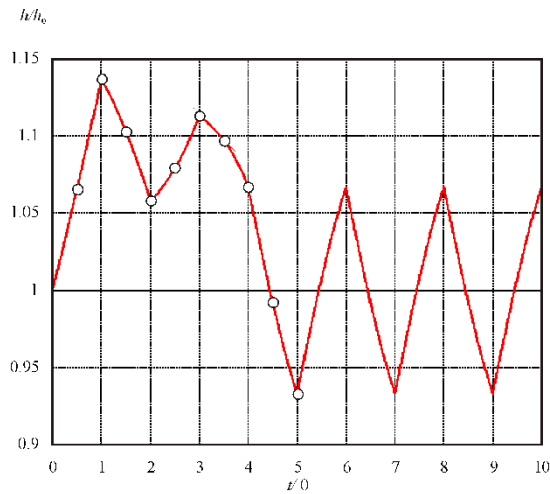


Figura 8.3. Diagramma temporale del carico nella sezione dell’otturatore

I risultati sono riportati nella Tabella 8.2. In Figura 8.3 si riporta il diagramma del carico (adimensionale) nella sezione di sbocco. La curva è il risultato dell’applicazione di un modello di calcolo automatico, il simbolo visualizza i punti di calcolo manuale.

Il massimo carico si registra alla fine della prima fase, ed è pari a 454.8 m.

La formula di Michaud-Allievi presuppone una manovra lineare di chiusura *nella velocità* (l’analisi condotta con le equazioni concatenate di Allievi presuppone una manovra lineare di chiusura *nel grado di apertura* η) e fornisce, alla fine della prima fase, una sovrappressione nella sezione di sbocco pari a:

$$\Delta h = \frac{c}{g} U_0 \frac{\theta}{\tau} = \frac{c}{g} U_0 \frac{1}{4}.$$

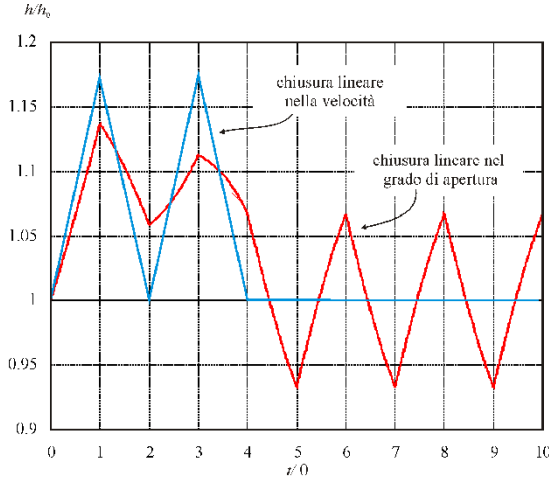


Figura 8.4. Diagramma temporale del carico nella sezione dell'otturatore per i due casi analizzati

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\Delta h = \frac{c}{g} U_0 \frac{1}{4} = \frac{1053}{9.806} \times 2.55 \times \frac{1}{4} = 68.5 \text{ m}$$

corrispondente a un carico piezometrico pari a $h = h_0 + \Delta h = 468.5 \text{ m}$.

Quest'ultimo valore è superiore a quello che si ottiene ipotizzando una chiusura lineare nel grado di apertura η , pari invece a 454.8 m.

Il confronto tra le due differenti manovre è riportato in Figura 8.4. Si può facilmente dimostrare che per ogni manovra di chiusura *lineare nella velocità* e di durata pari ad un multiplo pari della durata di fase, la combinazione di onde di colpo diretto e di onde di contraccolpo è tale da elidere gli effetti dopo la fine della chiusura, rendendo nullo il sovraccarico residuo.

Per calcolare la sequenza dei carichi piezometrici nella sezione intermedia, è necessario calcolare la sequenza dei valori assunti dalla funzione F (onda di colpo diretto, diretta verso monte) e della funzione f (onda di contraccolpo, diretta verso valle). Ricordando che:

$$h(t, x) - h_0 = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

agli istanti discreti t_1, t_2, \dots, t_i e per la sezione di sbocco ($x = 0$) risulta:

$$\underbrace{h(t_i, 0)}_{h_i} - h_0 = \underbrace{F(t_i)}_{F_i} - \underbrace{f(t_i)}_{f_i}.$$

Inoltre, considerando la condizione al contorno di monte:

$$h(t, L) - h_0 = F\left(t - \frac{L}{c}\right) - f\left(t + \frac{L}{c}\right) = 0$$

Tabella 8.3. Risultati del calcolo manuale per la sezione intermedia

t/θ	$\frac{F(t/\theta)}{h_0}$	$-\frac{f(t/\theta)}{h_0}$	$\frac{F(t/\theta - 0.25)}{h_0}$	$-\frac{f(t/\theta + 0.25)}{h_0}$	$\frac{h(t/\theta, 0.5) - h_0}{h_0}$	$h(t/\theta, 0.5)$ (m)
1	0.1369	0	0.10145	-0.033	0.06845	427.4
2	0.1950	-0.1369	0.18195	-0.1529	0.02905	411.6
3	0.3082	-0.1950	0.27825	-0.22165	0.0566	422.6
4	0.3753	-0.3082	0.3605	-0.32695	0.03355	413.4
5	0.3082	-0.3753	0.323	NaN	NaN	NaN
0.5	0.0660	0	0.033	0	0.033	413.2
1.5	0.1689	-0.0660	0.1529	-0.10145	0.05145	420.6
2.5	0.2483	-0.1689	0.22165	-0.18195	0.0397	415.9
3.5	0.3457	-0.2483	0.32695	-0.27825	0.0487	419.5
4.5	0.3378	-0.3457	0.35655	-0.3605	-0.00395	398.4

risulta:

$$f_i = F_{i-1}.$$

Pertanto, è possibile scrivere la relazione seguente:

$$h_i - h_0 = F_i - F_{i-1} \rightarrow F_i = h_i - h_0 + F_{i-1}.$$

F_i rappresenta l'onda di colpo diretto, che procede verso monte, nella sezione dell'otturatore ($x = 0$) calcolata all'istante t_i ; f_i rappresenta l'onda di contraccolpo, che procede verso valle, nella sezione dell'otturatore ($x = 0$) calcolata all'istante t_i .

Nella sezione intermedia, le due funzioni si presentano sfasate, rispettivamente, in anticipo e in ritardo di un intervallo temporale $t = \frac{L/2}{c}$.

Il carico nella sezione intermedia ha, dunque, la seguente espressione:

$$h\left(t, \frac{L}{2}\right) - h_0 = F\left(t - \frac{L}{2c}\right) - f\left(t + \frac{L}{2c}\right).$$

Esprimendo il tempo in forma adimensionale rispetto alla durata di fase, risulta:

$$h\left(\frac{t}{\theta}, \frac{L}{2}\right) - h_0 = F\left(\frac{t}{\theta} - 0.25\right) - f\left(\frac{t}{\theta} + 0.25\right).$$

La funzione $F(t/\theta - 0.25)$ viene tabellata interpolando linearmente tra i valori esterni più vicini all'istante $t - 0.25\theta$, mentre la funzione $f(t/\theta + 0.25)$ viene tabellata interpolando linearmente tra i valori esterni più vicini all'istante $t + 0.25\theta$.

I risultati sono riportati in Tabella 8.3. La Tabella 8.4 riporta, invece, i risultati di un programma di calcolo numerico automatico. Le differenze tra i risultati delle due tabelle sono trascurabili.

In Figura 8.5 si riporta il diagramma del sovraccarico (adimensionale) nella sezione intermedia. Le curve tratteggiate rappresentano le due funzioni F e $-f$ sfasate di un quarto di durata di fase.

Tabella 8.4. Risultati di un programma di calcolo numerico automatico per la sezione intermedia

t/θ	$\frac{F(t/\theta)}{h_0}$	$-\frac{f(t/\theta)}{h_0}$	$\frac{F(t/\theta - 0.25)}{h_0}$	$-\frac{f(t/\theta + 0.25)}{h_0}$	$\frac{h(t/\theta, 0.5) - h_0}{h_0}$	$h(t/\theta, 0.5)$ (m)
1	0.1369	0	0.1008	-0.0324	0.0684	427.4
2	0.1950	-0.1369	0.1828	-0.1535	0.0293	411.7
3	0.3082	-0.1950	0.2773	-0.2210	0.0563	422.5
4	0.3753	-0.3082	0.3617	-0.3277	0.0340	413.6
5	0.3082	-0.3753	0.3212	-0.3566	-0.0354	385.8
0.5	0.0660	0	0.0324	0	0.0324	412.9
1.5	0.1689	-0.0660	0.1535	-0.1008	0.0527	421.1
2.5	0.2483	-0.1689	0.2210	-0.1828	0.0382	415.2
3.5	0.3457	-0.2483	0.3277	-0.2773	0.0504	420.2
4.5	0.3378	-0.3457	0.3566	-0.3617	-0.0051	397.9

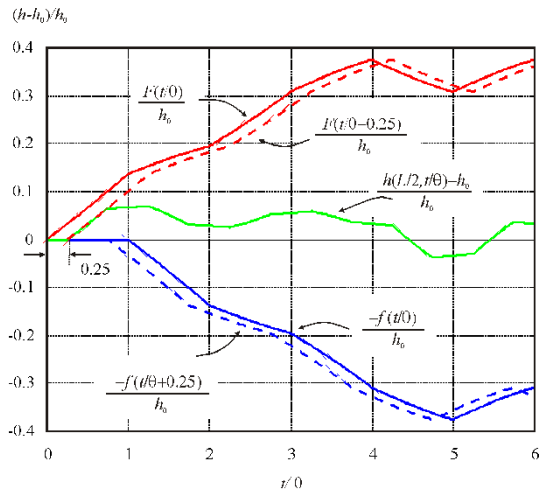


Figura 8.5. Schema grafico per il calcolo del sovraccarico nella sezione intermedia

Esercizio 8.3

Nell'impianto in Figura 8.6 la condotta di collegamento ha lunghezza $L = (4000 + 100 \times C_u)$ m, diametro $D = (500 + 10 \times C_{pu})$ mm, spessore $\delta = 10$ mm e scabrezza di Gauckler-Strickler pari a $k = 90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Il carico è $h_0 = 100$ m. Calcolare:

- la portata di moto permanente;
- la sovrappressione massima nella sezione di sbocco per una manovra di chiusura lenta di durata pari al doppio della durata di fase, trascurando le perdite di carico.

◇ Il fluido è acqua. Si assuma $\varepsilon = 2.14 \times 10^9$ Pa, $E = 2.00 \times 10^{11}$ Pa.

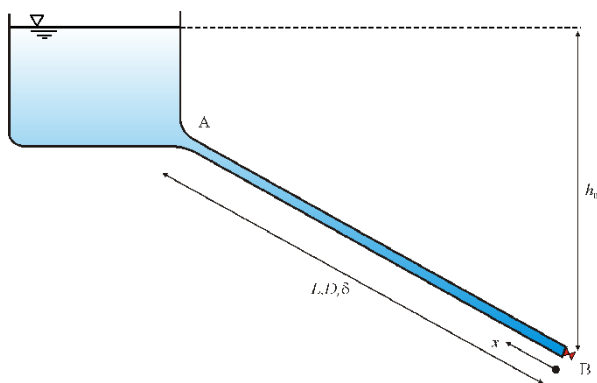


Figura 8.6. Serbatoio con condotta forzata e otturatore

Soluzione

La portata di moto permanente si calcola applicando l'equazione di bilancio dell'energia:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_0^2}{2g} + JL + \sum_{\xi_i} \frac{U_0^2}{2g} \rightarrow$$

$$h_0 = \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} + \frac{Q^2}{k^2 \left(\frac{D}{4} \right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2} L$$

nella quale abbiamo trascurato la perdita di carico concentrata all'imbocco. Invertendo l'espressione, risulta:

$$Q = \sqrt{\frac{\frac{h_0}{L}}{k^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{4/3} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2}}}$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$L = 4000$ m, $D = 500$ mm.

$$Q = \sqrt{\frac{\frac{100}{4000}}{90^2 \times \left(\frac{0.5}{4}\right)^{4/3} \times \left(\frac{\pi \times 0.5^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{2 \times 9.806 \times \left(\frac{\pi \times 0.5^2}{4}\right)^2}}} \simeq 0.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$U_0 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.7}{\pi \times 0.5^2} = 3.57 \text{ m/s.}$$

La celerità di propagazione delle perturbazioni è pari a:

$$c = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon/\rho}{1 + \frac{\varepsilon D}{E\delta}}}{\frac{2.14 \times 10^9/1000}{1 + \frac{2.14 \times 10^9 \times 0.5}{2.0 \times 10^{11} \times 0.01}}}} = 1180 \text{ m/s}$$

e la durata di fase è pari a:

$$\theta = \frac{2L}{c} = \frac{2 \times 4000}{1180} = 6.78 \text{ s.}$$

La durata della manovra è pari a:

$$\tau = 2\theta = 13.56 \text{ s.}$$

Le equazioni concatenate di Allievi hanno la seguente espressione:

$$z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2Al(\eta_{i-1}z_{i-1} - \eta_i z_i).$$

Al è il numero di Allievi, pari a $Al = \frac{U_0 c}{2gh_0}$; inoltre $z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$, $\eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$.

Per il caso in esame, risulta:

$$Al = \frac{U_0 c}{2gh_0} = \frac{3.57 \times 1180}{2 \times 9.806 \times 100} = 2.148.$$

Scegliamo l'istante $0 < t_1 < \theta$ con $t_1 = 0.5\theta = 3.39$ s; quindi $t_2 = t_1 + \theta = 10.17$ s, $t_3 = t_2 + \theta = 16.95$ s. Il grado di apertura si può calcolare dalla legge di chiusura

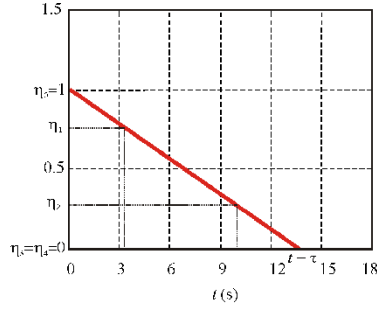


Figura 8.7. Diagramma temporale del grado di apertura

lineare (dell'otturatore):

$$\eta = 1 - \frac{t}{\tau} \text{ per } 0 \leq t \leq \tau$$

$$\eta = 0 \text{ per } t > \tau$$

diagrammata in Figura 8.7.

Il valore del grado di apertura agli istanti di calcolo è riportato in Tabella 8.5.

Tabella 8.5. Valore del grado di apertura agli istanti di calcolo

$t_0 = 0 \text{ s}$	$\eta_0 = 1$
$t_1 = 3.39 \text{ s}$	$\eta_1 = 0.75$
$t_2 = 10.17 \text{ s}$	$\eta_2 = 0.25$
$t_3 = 16.95 \text{ s}$	$\eta_3 = 0$

Inoltre, risulta $z_0 = 1$.

All'istante t_1 risulta:

$$z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2Al(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \rightarrow z_1^2 + 2Al\eta_1 z_1 - 1 - 2Al = 0.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_1^2 + 2 \times 2.148 \times 0.75 \times z_1 - 1 - 2 \times 2.148 = 0 \rightarrow z_1^2 + 3.2225 \times z_1 - 5.296 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_1 = 1.198$.

All'istante t_2 risulta:

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2Al(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_2^2 + (1.198)^2 - 2 - 2 \times 2.148 \times 0.75 \times 1.198 + 2 \times 2.148 \times 0.25 z_2 = 0 \rightarrow$$

$$z_2^2 + 1.074 \times z_2 - 4.4248 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_2 = 1.634$.

All'istante t_3 risulta:

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2Al(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_3^2 + (1.634)^2 - 2 - 2 \times 2.148 \times 0.25 \times 1.634 = 0 \rightarrow z_3^2 - 1.085 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_3 = 1.0416$.

Scegliamo l'istante $0 < t'_1 \leq \theta$ con $t'_1 = \theta = 6.78$ s; quindi $t'_2 = t'_1 + \theta = 13.56$ s, $t'_3 = t'_2 + \theta = 20.34$ s. Il grado di apertura si può calcolare dalla legge di chiusura lineare.

I valori sono riportati nella Tabella 8.6.

Tabella 8.6. Serie temporale del grado di apertura

$t'_1 = 6.78$ s	$\eta'_1 = 0.50$
$t'_2 = 13.56$ s	$\eta'_2 = 0$
$t'_3 = 20.34$ s	$\eta'_3 = 0$

Inoltre, risulta: $z'_0 = 1$, $\eta'_0 = 1$.

All'istante t'_1 risulta:

$$z_1'^2 + z_0'^2 - 2 = 2Al(\eta'_0 z'_0 - \eta'_1 z'_1) \rightarrow z_1'^2 + 2Al\eta'_1 z'_1 - 1 - 2Al = 0.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_1'^2 + 2 \times 2.148 \times 0.50 \times z'_1 - 1 - 2 \times 2.148 = 0 \rightarrow z_1'^2 + 2.148 \times z'_1 - 5.296 = 0$$

che fornisce la soluzione $z'_1 = 1.4656$.

All'istante t'_2 risulta:

$$z_2'^2 + z_1'^2 - 2 = 2Al(\eta'_1 z'_1 - \eta'_2 z'_2).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_2'^2 + (1.4656)^2 - 2 - 2 \times 2.148 \times 0.5 \times 1.4656 = 0 \rightarrow z_2'^2 - 3.0 = 0$$

che fornisce la soluzione $z'_2 = 1.732$.

All'istante t'_3 risulta:

$$z_3'^2 + z_2'^2 - 2 = 2Al(\eta'_2 z'_2 - \eta'_3 z'_3).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_3'^2 + (1.732)^2 - 2 = 0 \rightarrow z_3'^2 = -1$$

e, tenuto conto dell'espressione di z'_3 , ciò equivale a $h'_3 = -h_0$.

I valori risultanti sono riportati in Tabella 8.7 e diagrammati in Figura 8.8:

Tabella 8.7. Tabella riassuntiva dei risultati di calcolo

$t_0 = 0 \text{ s}$	$\eta_0 = 1$	$z_0 = 1$	$h_0 = 100 \text{ m}$
$t_1 = 3.39 \text{ s}$	$\eta_1 = 0.75$	$z_1 = 1.198$	$h_1 = 144 \text{ m}$
$t'_1 = 6.78 \text{ s}$	$\eta'_1 = 0.5$	$z'_1 = 1.466$	$h'_1 = 215 \text{ m}$
$t_2 = 10.17 \text{ s}$	$\eta_2 = 0.25$	$z_2 = 1.634$	$h_2 = 267 \text{ m}$
$t'_2 = 13.56 \text{ s}$	$\eta'_2 = 0$	$z'_2 = 1.732$	$h'_2 = 300 \text{ m}$
$t_3 = 16.95 \text{ s}$	$\eta_3 = 0$	$z_3 = 1.042$	$h_3 = 108 \text{ m}$
$t'_3 = 20.34 \text{ s}$	$\eta'_3 = 0$		$h'_3 = 100 \text{ m}$

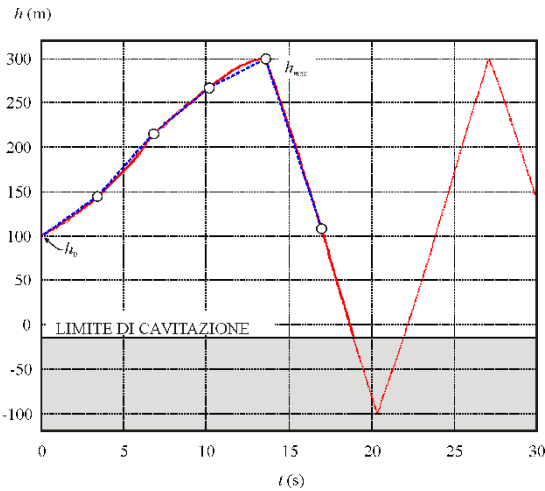


Figura 8.8. Diagramma dei carichi piezometrici relativi nella sezione di sbocco. Per valori inferiori al limite di cavitazione, il modello di calcolo adottato non è più valido

L'ultimo valore (ed ogni altro valore di carico minore di -10.33 m) è inammissibile: la cavitazione limita il valore minimo di pressione assoluta al valore della tensione di vapore.

Esercizio 8.4

Nell'impianto in Figura 8.9 la portata all'istante iniziale, con otturatore completamente aperto, è $Q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$, con una velocità media in condotta $U_0 = 2 \text{ m/s}$. La condotta è in acciaio di spessore $\delta = 10 \text{ mm}$, lunghezza $L = 1000 \text{ m}$. Il carico piezometrico è $h_0 = 100 \text{ m}$.

- Calcolare i sovraccarichi nella sezione di sbocco per una manovra di chiusura lineare di durata $\tau = 4 \text{ s}$, facendo uso delle equazioni concatenate di Allievi, a partire da $t_1 = 0.5 \text{ s}$, e per almeno tre istanti successivi.
- ◊ Assumere il modulo di comprimibilità isoentropico dell'acqua $\varepsilon = 2.0 \times 10^9 \text{ Pa}$, il modulo di Young dell'acciaio $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$. Trascurare le perdite di carico.

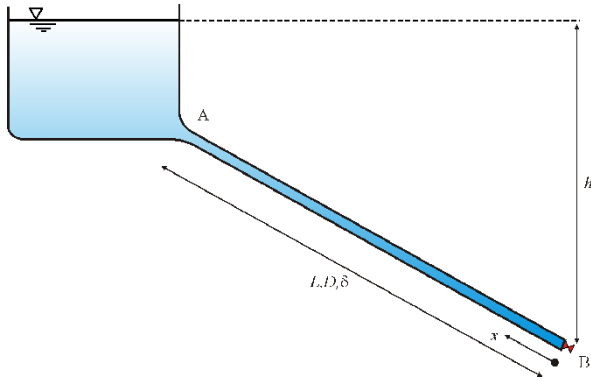


Figura 8.9. Serbatoio con condotta e otturatore

Soluzione

Il diametro della condotta è pari a:

$$D = \sqrt{\frac{4Q_0}{\pi U_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.0}{\pi \times 2.0}} = 0.8 \text{ m}.$$

La celerità relativa della perturbazione è pari a:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon D}{E \delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.0 \times 10^9}{1000}}}{\sqrt{1 + \frac{2.0 \times 10^9}{2.1 \times 10^{11}} \times \frac{0.8}{0.010}}} = 1065 \text{ m/s}.$$

La durata di fase della condotta nella sezione dell'otturatore è pari a:

$$\theta = \frac{2L}{c} = \frac{2 \times 1000}{1065} = 1.88 \text{ s.}$$

Poiché $\tau > \theta$ la manovra è lenta.

Le equazioni concatenate di Allievi hanno la seguente espressione:

$$z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2Al(\eta_{i-1}z_{i-1} - \eta_i z_i).$$

Al è il numero di Allievi, pari a $Al = \frac{U_0 c}{2gh_0}$; inoltre $z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$, $\eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$.

Per il caso in esame, risulta:

$$Al = \frac{U_0 c}{2gh_0} = \frac{2 \times 1065}{2 \times 9.806 \times 100} = 1.086.$$

Scegliamo l'istante $0 < t_1 < \theta$ con $t_1 = 0.5$ s; quindi $t_2 = t_1 + \theta = 2.38$ s, $t_3 = t_2 + \theta = 4.26$ s e $t_4 = t_3 + \theta = 6.14$ s. Il grado di apertura si può calcolare dalla legge di chiusura lineare (dell'otturatore) diagrammata in Figura 8.10 ed è riportato in Tabella 8.8:

$$\eta = 1 - \frac{t}{\tau} \text{ per } 0 \leq t \leq \tau$$

$$\eta = 0 \text{ per } t > \tau.$$

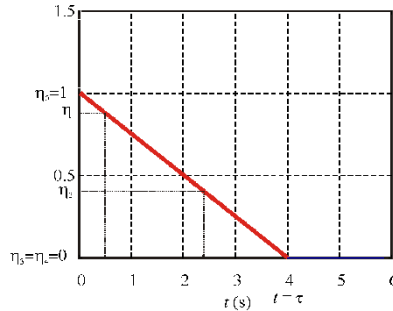


Figura 8.10. Diagramma temporale del grado di apertura dell'otturatore

Tabella 8.8. Serie temporale del grado di apertura agli istanti di calcolo scelti

$t_0 = 0 \text{ s}$	$\eta_0 = 1$
$t_1 = 0.5 \text{ s}$	$\eta_1 = 0.875$
$t_2 = 2.38 \text{ s}$	$\eta_2 = 0.405$
$t_3 = 4.26 \text{ s}$	$\eta_3 = 0$
$t_4 = 6.14 \text{ s}$	$\eta_4 = 0$

Inoltre, risulta: $z_0 = 1$, $\eta_0 = 1$.

All'istante t_1 risulta:

$$z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2Al(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \rightarrow z_1^2 + 2Al\eta_1 z_1 - 1 - 2Al = 0.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_1^2 + 2 \times 1.086 \times 0.875 \times z_1 - 1 - 2 \times 1.086 = 0 \rightarrow z_1^2 + 1.9005 \times z_1 - 3.172 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_1 = 1.069$.

All'istante t_2 risulta:

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2Al(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_2^2 + (1.069)^2 - 2 - 2 \times 1.086 \times 0.875 \times 1.069 + 2 \times 1.086 \times 0.405 \times z_2 = 0$$

cioè $z_2^2 + 0.88 \times z_2 - 2.888 = 0$, che fornisce la soluzione $z_2 = 1.315$.

All'istante t_3 risulta:

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2Al(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_3^2 + (1.315)^2 - 2 - 2 \times 1.086 \times 0.405 \times 1.315 = 0$$

cioè $z_3^2 - 1.428 = 0$ che fornisce la soluzione $z_3 = 1.195$.

All'istante t_4 risulta:

$$z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2Al(\eta_3 z_3 - \eta_4 z_4).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_4^2 - 0.572 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_4 = 0.756$.

I valori calcolati del carico sono riportati in Tabella 8.9.

Tabella 8.9. Tabella riassuntiva dei risultati del calcolo

$t_0 = 0$ s	$\eta_0 = 1$	$z_0 = 1$	$h_0 = 100$ m
$t_1 = 0.5$ s	$\eta_1 = 0.875$	$z_1 = 1.069$	$h_1 = 114$ m
$t_2 = 2.38$ s	$\eta_2 = 0.405$	$z_2 = 1.315$	$h_2 = 173$ m
$t_3 = 4.26$ s	$\eta_3 = 0$	$z_3 = 1.195$	$h_3 = 143$ m
$t_4 = 6.14$ s	$\eta_4 = 0$	$z_4 = 0.756$	$h_4 = 57$ m

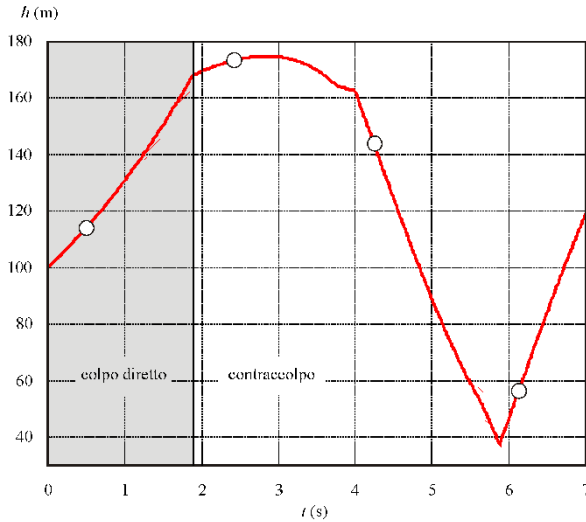


Figura 8.11. Sezione di sbocco. Valore dei carichi piezometrici agli istanti $t = 0.5$ s (1); $t = 2.38$ s (2); $t = 4.26$ s (3); $t = 6.14$ s (4). La curva continua è il risultato ottenuto con procedura di calcolo automatico

Esercizio 8.5

Nell'impianto in Figura 8.12 la portata a regime è $Q_0 = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ con una velocità media in condotta $U_0 = 2 \text{ m/s}$. La condotta è in acciaio di spessore $\delta = 15 \text{ mm}$, $L = 800 \text{ m}$ con $h_0 = 100 \text{ m}$. Calcolare:

- la celerità di trasmissione della perturbazione e la durata di fase della condotta;
 - i sovraccarichi nella sezione di sbocco per una manovra di apertura lineare di durata $\tau = 3 \text{ s}$ facendo uso delle equazioni concatenate di Allievi, a partire da $t_1 = 0.5 \text{ s}$ e per almeno tre istanti successivi;
 - il valore minimo del carico, in corrispondenza di $t = \theta$ (durata di fase della condotta).
- ◇ Assumere il modulo di comprimibilità isoentropico dell'acqua $\varepsilon = 2.0 \times 10^9 \text{ Pa}$, il modulo di Young dell'acciaio $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$. Trascurare le perdite di carico.

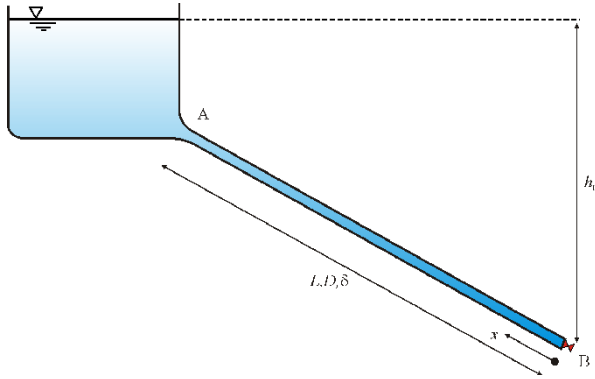


Figura 8.12. Serbatoio con condotta e otturatore

Soluzione

Il diametro della condotta è pari a:

$$D = \sqrt{\frac{4Q_0}{\pi U_0}} = \sqrt{\frac{4 \times 1.5}{\pi \times 2}} = 0.98 \text{ m} \sim 1.0 \text{ m}.$$

La celerità relativa della perturbazione è pari a:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon D}{E \delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.0 \times 10^9}{1000}}}{\sqrt{1 + \frac{2.0 \times 10^9}{2.1 \times 10^{11}} \times \frac{1}{0.015}}} = 1106 \text{ m/s}.$$

La durata di fase della condotta nella sezione dell'otturatore è pari a:

$$\theta = \frac{2L}{c} = \frac{2 \times 800}{1106} = 1.45 \text{ s}.$$

Poiché $\tau > \theta$ la manovra è lenta.

Le equazioni concatenate di Allievi hanno la seguente espressione:

$$z_i^2 + z_{i-1}^2 - 2 = 2Al(\eta_{i-1}z_{i-1} - \eta_i z_i).$$

Al è il numero di Allievi, pari a $Al = \frac{U_0 c}{2gh_0}$; inoltre $z_i = \sqrt{\frac{h_i}{h_0}}$, $\eta_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$.

Per il caso in esame risulta:

$$Al = \frac{U_0 c}{2gh_0} = \frac{2 \times 1106}{2 \times 9.806 \times 100} = 1.128.$$

Scegliamo l'istante $0 < t_1 < \theta$ con $t_1 = 0.5 \text{ s}$; quindi $t_2 = t_1 + \theta = 1.95 \text{ s}$, $t_3 = t_2 + \theta = 3.4 \text{ s}$ e $t_4 = t_3 + \theta = 4.85 \text{ s}$. Il grado di apertura si può calcolare

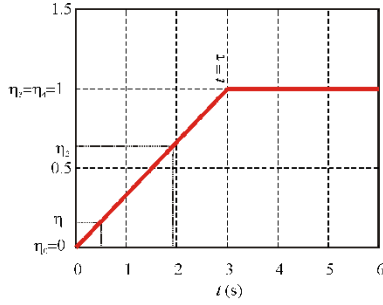


Figura 8.13. Diagramma temporale del grado di apertura

dalla legge di apertura lineare (dell'otturatore) diagrammata in Figura 8.13 ed è riportato in Tabella 8.10:

$$\eta = \frac{t}{\tau} \text{ per } 0 \leq t \leq \tau$$

$$\eta = 1 \text{ per } t > \tau.$$

Tabella 8.10. Serie temporale del grado di apertura agli istanti di calcolo fissati

$t_0 = 0 \text{ s}$	$\eta_0 = 0$
$t_1 = 0.5 \text{ s}$	$\eta_1 = 0.166$
$t_2 = 1.95 \text{ s}$	$\eta_2 = 0.65$
$t_3 = 3.4 \text{ s}$	$\eta_3 = 1$
$t_4 = 4.85 \text{ s}$	$\eta_4 = 1$

Inoltre risulta $z_0 = 1$.

All'istante t_1 risulta:

$$z_1^2 + z_0^2 - 2 = 2Al(\eta_0 z_0 - \eta_1 z_1) \rightarrow z_1^2 + 2Al\eta_1 z_1 - 1 = 0.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_1^2 + 2 \times 1.128 \times 0.1666 \times z_1 - 1 = 0 \rightarrow z_1^2 + 0.37581 \times z_1 - 1 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_1 = 0.829$.

All'istante t_2 risulta:

$$z_2^2 + z_1^2 - 2 = 2Al(\eta_1 z_1 - \eta_2 z_2).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_2^2 + (0.829)^2 - 2 - 2 \times 1.128 \times 0.1666 \times 0.829 + 2 \times 1.128 \times 0.65 \times z_2 = 0$$

cioè $z_2^2 + 1.466 \times z_2 - 1.623 = 0$, che fornisce la soluzione $z_2 = 0.737$.

All'istante t_3 risulta:

$$z_3^2 + z_2^2 - 2 = 2Al(\eta_2 z_2 - \eta_3 z_3).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_3^2 + (0.737)^2 - 2 - 2 \times 1.1128 \times 0.65 \times 0.737 + 2 \times 1.1128 \times 1 \times z_3 = 0$$

cioè $z_3^2 - 2.256 \times z_3 - 2.537 = 0$, che fornisce la soluzione $z_3 = 0.824$.

All'istante t_4 risulta:

$$z_4^2 + z_3^2 - 2 = 2Al(\eta_3 z_3 - \eta_4 z_4).$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_4^2 + 2.256 \times z_4 - 3.18 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_4 = 0.982$.

I valori di carico calcolati sono riportati in Tabella 8.11.

Tabella 8.11. Tabella riassuntiva dei risultati del calcolo

$t_0 = 0$ s	$\eta_0 = 0$	$z_0 = 1$	$h_0 = 100$ m
$t_1 = 0.5$ s	$\eta_1 = 0.166$	$z_1 = 0.829$	$h_1 = 68.8$ m
$t_2 = 1.95$ s	$\eta_2 = 0.65$	$z_2 = 0.737$	$h_2 = 54.3$ m
$t_3 = 3.4$ s	$\eta_3 = 1$	$z_3 = 0.824$	$h_3 = 67.9$ m
$t_4 = 4.85$ s	$\eta_4 = 1$	$z_4 = 0.982$	$h_4 = 96.4$ m

Il valore minimo del carico si ottiene all'istante $t = \theta = 1.45$ s.

All'istante θ risulta $\eta_{min} = 0.4833$. Sostituendo nell'equazione concatenata di Allievi, risulta:

$$z_{min}^2 + z_0^2 - 2 = 2Al(\eta_0 z_0 - \eta_{min} z_{min}) \rightarrow z_{min}^2 + 2Al\eta_{min} z_{min} - 1 = 0.$$

Sostituendo i valori numerici risulta:

$$z_{min}^2 + 2 \times 1.128 \times 0.4833 \times z_{min} - 1 = 0 \rightarrow z_{min}^2 + 1.09 \times z_{min} - 1 = 0$$

che fornisce la soluzione $z_{min} = 0.593$, corrispondente a un carico $h_{min} = 35.3$ m.

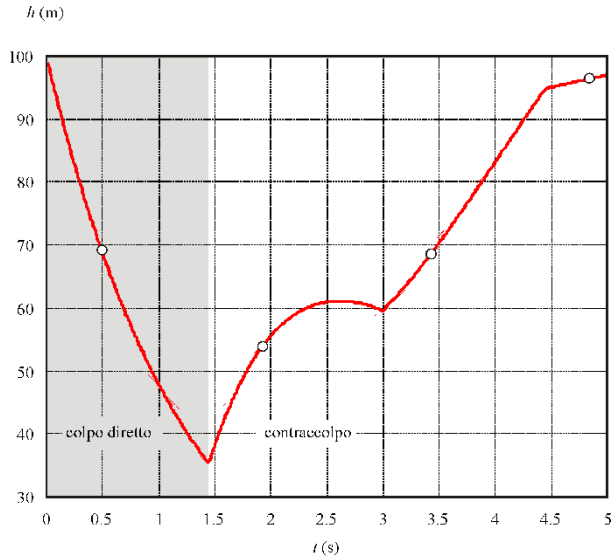


Figura 8.14. Sezione di sbocco. Valore dei carichi piezometrici agli istanti $t = 0.5$ s (1); $t = 1.95$ s (2); $t = 3.4$ s (3); $t = 4.85$ s (4). La curva continua è il risultato ottenuto con procedura di calcolo automatica

Esercizio 8.6

Nell'impianto in Figura 8.15 la condotta forzata è realizzata con due tronchi in acciaio dalle seguenti caratteristiche:

tronco AC di monte: $D_1 = 950$ mm, $L_1 = 1800$ m, $c_1 = 1037$ m/s;

tronco CB di valle: $D_2 = 800$ mm, $L_2 = 2000$ m, $c_2 = 1152$ m/s.

I due tronchi sono liberi di scorrere assialmente. Il carico sulla sezione di sbocco è pari a $h_0 = 350$ m. La quota geodetica delle sezioni è $z_A = 300$ m, $z_C = 200$ m, $z_B = 100$ m. Partendo da una portata iniziale di moto permanente pari a $Q_0 = 2.1$ m³/s, si esegue una manovra di chiusura lineare di durata $\tau = 8$ s.

- Determinare, con il metodo delle caratteristiche, l'andamento della *pressione* nella sezione di raccordo C per due fasi.
- ◇ Si trascurino la pendenza della condotta e le dissipazioni.

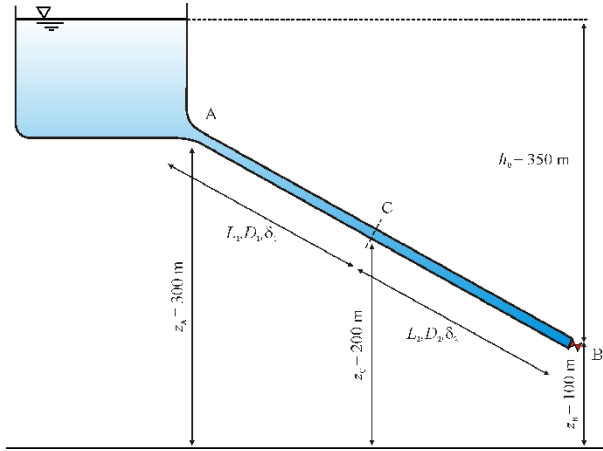


Figura 8.15. Serbatoio con condotta a caratteristiche non uniformi e otturatore

Soluzione

La durata di fase dei due tronchi è pari a:

$$\theta_1 = \frac{2L_1}{c_1} = \frac{2 \times 1800}{1037} = 3.47 \text{ s}$$

$$\theta_2 = \frac{2L_2}{c_2} = \frac{2 \times 2000}{1152} = 3.47 \text{ s}$$

e la durata di fase della condotta è pari a $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 6.94 \text{ s}$. Poiché risulta $\tau > \theta$, la manovra è lenta. Inoltre, la sezione C viene raggiunta in tempi uguali da perturbazioni provenienti dall'imbocco o dall'otturatore.

La legge di chiusura è la seguente:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{t}{8} & 0 \leq t \leq 8 \text{ s} \\ \eta &= 0 & t > 8 \text{ s} \end{aligned}$$

e, in funzione del tempo adimensionale rispetto alla durata di fase, risulta:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - 0.868 \frac{t}{\theta} & 0 \leq \frac{t}{\theta} \leq 1.152 \\ \eta &= 0 & \frac{t}{\theta} > 1.152. \end{aligned}$$

Scelto il sistema di coordinate in Figura 8.16, è possibile individuare due famiglie di caratteristiche per ogni tronco. È conveniente assumere la coppia di variabili

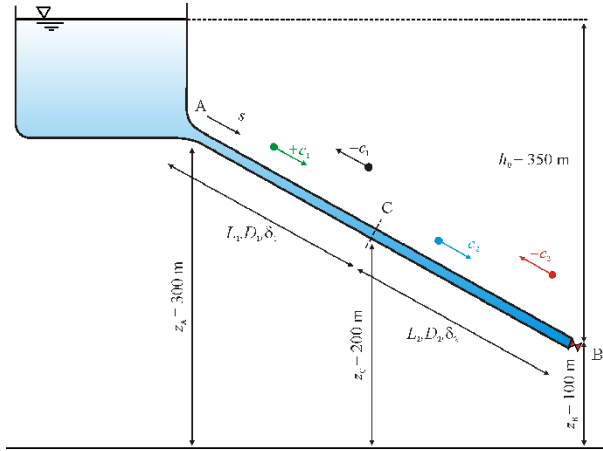


Figura 8.16. Schema per la definizione delle celerità di propagazione delle perturbazioni

dipendenti Q e h . Lungo le due caratteristiche, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} + \frac{c_{1,2}}{g\Omega_{1,2}} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{\Omega_{1,2}} \sin \theta + c_{1,2} J \quad \text{su} \quad \frac{ds}{dt} = c_{1,2} \text{ verso valle, } \lambda^+ \\ \frac{dh}{dt} - \frac{c_{1,2}}{g\Omega_{1,2}} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{\Omega_{1,2}} \sin \theta - c_{1,2} J \quad \text{su} \quad \frac{ds}{dt} = -c_{1,2} \text{ verso monte, } \lambda^- . \end{aligned}$$

Trascurando la pendenza della condotta e le dissipazioni, le espressioni precedenti si semplificano come segue:

$$\begin{aligned} dh + \frac{c_{1,2}}{g\Omega_{1,2}} dQ &= 0 \quad \text{su} \quad \frac{ds}{dt} = c_{1,2} \text{ verso valle, } \lambda^+ \\ dh - \frac{c_{1,2}}{g\Omega_{1,2}} dQ &= 0 \quad \text{su} \quad \frac{ds}{dt} = -c_{1,2} \text{ verso monte, } \lambda^- . \end{aligned}$$

Il punto C all'istante adimensionale 0.25 è ancora in condizioni indisturbate. Per calcolare lo stato del sistema in C all'istante 0.5, è necessario calcolare preventivamente lo stato del sistema in B all'istante 0.25.

Il punto di funzionamento all'istante 0.25 al contorno di valle, si ottiene ponendo a sistema le due equazioni corrispondenti alla caratteristica λ^+ , proveniente da C_0 , e alla condizione al contorno di valle imposta dall'otturatore:

$$\begin{cases} h_B^{0.25} - h_C^0 + \frac{c_2}{g\Omega_2} (Q_B^{0.25} - Q_C^0) = 0 \\ h_B^{0.25} - h_C^0 \left(\frac{Q_B^{0.25}}{Q_C^0} \frac{1}{\eta^{0.25}} \right)^2 = 0 . \end{cases}$$

La seconda equazione si basa sullo schema di funzionamento dell'otturatore, che prevede la seguente relazione tra portata, grado di apertura e carico:

$$\frac{Q}{Q_0} = \eta \sqrt{\frac{h}{h_0}} .$$

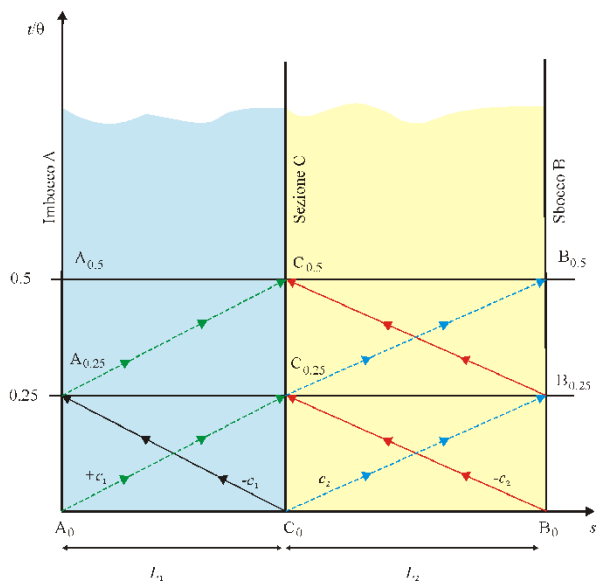


Figura 8.17. Rette caratteristiche nel piano $s - t$

Calcolato lo stato del sistema in B all'istante 0.25, lo stato del sistema in C all'istante 0.5 si ottiene ponendo a sistema gli invarianti che si trasferiscono da monte (da A all'istante 0.25) e da valle (da B all'istante 0.25). Alle differenze, risulta:

$$\begin{aligned} h_C^{0.5} - h_A^{0.25} + \frac{c_1}{g\Omega_1} (Q_C^{0.5} - Q_A^{0.25}) &= 0 \\ h_C^{0.5} - h_B^{0.25} - \frac{c_2}{g\Omega_2} (Q_C^{0.5} - Q_B^{0.25}) &= 0. \end{aligned}$$

La pressione nella sezione C si calcola come segue:

$$p = \gamma (h_C + z_B - z_C).$$

I risultati sono riassunti in Tabella 8.12 e diagrammati in Figura 8.18.

Tabella 8.12. Tabella riassuntiva dei risultati del calcolo

t/θ	η	h_C (m)	p_C (bar)	Q_C (m ³ /s)
0.25	0.783	350.0	24.5	2.10
0.5	0.566	404.5	29.8	1.73
0.75	0.349	472.0	36.5	1.28
1.0	0.1319	480.9	37.3	0.49
1.25	0	485.9	37.8	-0.45
1.5	0	410.5	30.5	-0.79
1.75	0	238.3	13.6	-0.61
2.0	0	192.3	9.1	-0.14

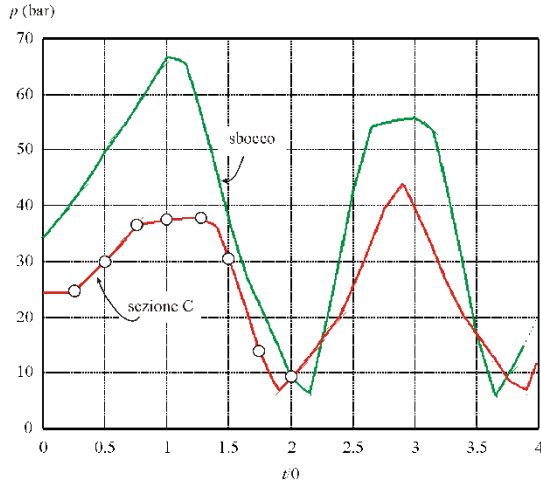


Figura 8.18. Diagramma della pressione relativa nella sezione di sbocco e nella sezione intermedia C

Esercizio 8.7

Un impianto di sollevamento (Figura 8.19) convoglia, a regime, una portata $Q_0 = (0.3 + C_u/100) \text{ m}^3/\text{s}$. La condotta di mandata è lunga $L = (1500 + C_{pu} \times 10) \text{ m}$, ha diametro $D = 0.4 \text{ m}$ e ha una pressione nominale di funzionamento pari a $p_{max} = (25 + 0.5 \times C_{pu}) \text{ bar}$.

La scabrezza di Gauckler-Strickler è pari a $k = 80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Il carico statico, misurato rispetto ad una sezione immediatamente a valle della pompa, è pari a $H'_s = 210 \text{ m}$.

- Dimensionare una cassa d'aria (senza strozzatura e con strozzatura ottima), ipotizzando una valvola di non ritorno tra cassa e pompa.
- ◇ Si assuma un distacco immediato della pompa. Si assuma un modulo di comprimibilità isoentropico dell'acqua $\varepsilon = 2.0 \times 10^9 \text{ Pa}$, un modulo di Young dell'acciaio $E = 2.0 \times 10^{11} \text{ Pa}$ e uno spessore della condotta pari a 8 mm .

Soluzione

A seguito del distacco della pompa, si genera una depressione a valle della pompa che può essere calcolata, cautelativamente, trascurando l'inerzia della girante e

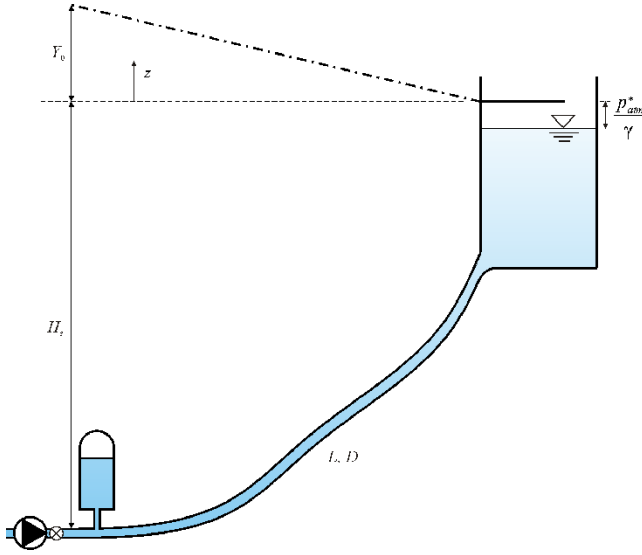


Figura 8.19. Impianto di sollevamento con cassa d'aria

del fluido e assumendo un annullamento istantaneo della portata, con la formula seguente:

$$\Delta p = -\rho c V_0.$$

La velocità iniziale in condotta è pari a:

$$V_0 = \frac{4Q_0}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.3}{\pi \times 0.4^2} = 2.39 \text{ m/s}$$

e la celerità della perturbazione è pari a:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon D}{E \delta}}} = \frac{\sqrt{\frac{2.0 \times 10^9}{1000}}}{\sqrt{1 + \frac{2.0 \times 10^9}{2.0 \times 10^{11}} \times \frac{0.4}{0.008}}} = 1155 \text{ m/s}.$$

La durata di fase è pari a:

$$\theta = \frac{2L}{c} = \frac{2 \times 1500}{1155} = 2.60 \text{ s}.$$

La riduzione di pressione risulta pari a $\Delta p = -1000 \times 1155 \times 2.39 = -27.60 \text{ bar}$.

Il carico statico assoluto è pari a

$$H_s = H'_s + \frac{p_{atm}^*}{\gamma} = 210 + 10.33 = 220.33 \text{ m}.$$

La pressione assoluta nella sezione subito a valle della pompa, è pari a:

$$p^* = \gamma H_s - \Delta p = 9806 \times 220.33 - 2.76 \times 10^6 = -599 \text{ kPa} < p_{vap}.$$

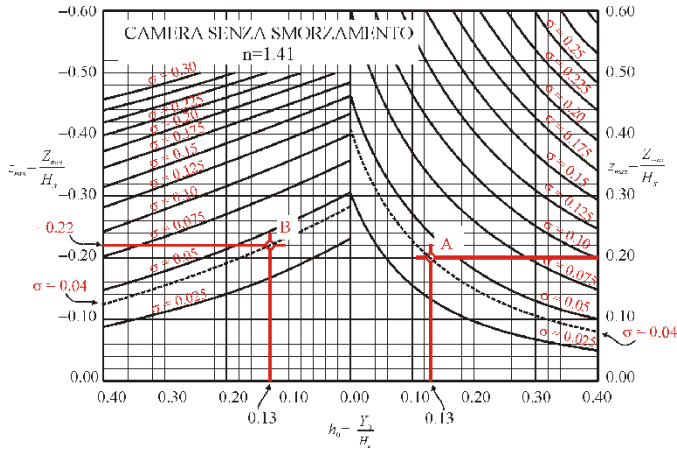


Figura 8.20. Diagramma per cassa senza strozzatura (modificata da Evangelisti, G., *L'Energia Elettrica*, Settembre 1938)

Ovviamente la pressione assoluta non può essere negativa né può essere inferiore alla tensione di vapore. La condotta va in cavitazione nella fase di colpo diretto e si rende necessaria l'installazione di una cassa d'aria.

Il dimensionamento e la verifica verranno eseguiti facendo uso di due grafici adimensionali. Per usare tali grafici, riportati in Figura 8.20 e in Figura 8.21 per una trasformazione adiabatica del gas ($n = 1.41$), è necessario considerare la massima pressione ammissibile in condotta, pari a $p_{max} = 25$ bar.

Il massimo valore del carico ammissibile dipende dalla massima pressione tollerabile in condotta, ed è pari a:

$$H'_s + Z_{max} = \frac{p_{max}}{\gamma} \rightarrow Z_{max} = \frac{p_{max}}{\gamma} - H'_s \equiv \frac{2.5 \times 10^6}{9806} - 210 = 44.9 \text{ m.}$$

Cassa senza strozzatura

Il parametro adimensionale da utilizzarsi nel grafico in Figura 8.20 è pari a:

$$z_{max} = \frac{Z_{max}}{H_s} = \frac{44.9}{220.33} = 0.20.$$

Le perdite di carico da considerarsi sono quelle relative a condotta nuova (situazione più critica), pari a:

$$Y_0 = \frac{V_0^2}{k^2 R^{4/3}} L = \frac{2.39^2}{80^2 \times \left(\frac{0.4}{4}\right)^{4/3}} \times 1500 = 28.8 \text{ m.}$$

Il secondo parametro da inserire nei diagrammi è $h_0 = \frac{Y_0}{H_s} = \frac{28.8}{220.33} = 0.13$.

Dal diagramma in Figura 8.20, in corrispondenza del punto A ottenuto per intersezione di $z_{max} = 0.20$ e di $h_0 = 0.13$, si stima un parametro σ pari a:

$$\sigma \simeq 0.04.$$

Il parametro σ è un gruppo adimensionale definito come segue:

$$\sigma = \frac{\Omega L}{U_s H_s} \frac{V_0^2}{2g}.$$

U_s è il volume di gas nella cassa in condizioni statiche (pompa spenta, fluido in quiete, carico pari a H_s) ed è pari a:

$$U_s = \frac{\Omega L}{\sigma H_s} \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\pi \times 0.4^2}{4} \times 1500 \times \frac{2.39^2}{2 \times 9.806} = 6.22 \text{ m}^3.$$

In corrispondenza di $h_0 = 0.13$ e $\sigma = 0.04$ (punto B) si ottiene dal diagramma a sinistra, $z_{min} = -0.22$.

Facendo uso della legge di trasformazione del gas, risulta $H_s U_s^n = H_{min} U_{max}^n$ e, quindi:

$$U_{max} = \frac{U_s}{(1 + z_{min})^{1/n}} = \frac{6.22}{(1 - 0.22)^{1/1.41}} = 7.42 \text{ m}^3.$$

Inoltre:

$$U_{min} = \frac{U_s}{(1 + z_{max})^{1/n}} = \frac{6.22}{(1 + 0.20)^{1/1.41}} = 5.47 \text{ m}^3.$$

Il volume d'aria nella cassa con pompa accesa e carico pari a $H_s + Y_0$, è pari a:

$$U_0 = \frac{U_s}{(1 + h_0)^{1/n}} = \frac{6.22}{(1 + 0.13)^{1/1.41}} = 5.70 \text{ m}^3.$$

Per verificare che non ci sia cavitazione deve risultare:

$$h_{min}^* = H_s (1 + z_{min}) = 220.33 \times (1 - 0.22) \equiv 171.9 \text{ m} > \frac{p_{atm}^*}{\gamma}.$$

La pressione relativa minima vale:

$$p_{min} = \gamma (h_{min}^* - 10.33) = 9806 \times (171.9 - 10.33) = 15.8 \text{ bar}.$$

Sarà sufficiente installare una cassa di volume totale pari a 8 m^3 .

Cassa con strozzatura ottima

Si procede come nel caso di cassa senza strozzatura, ma utilizzando un nuovo diagramma. Dal diagramma in Figura 8.21, in corrispondenza del punto A risulta:

$$\sigma_{opt} = \frac{\Omega L}{U_s H_s} \frac{V_0^2}{2g} = 0.12.$$

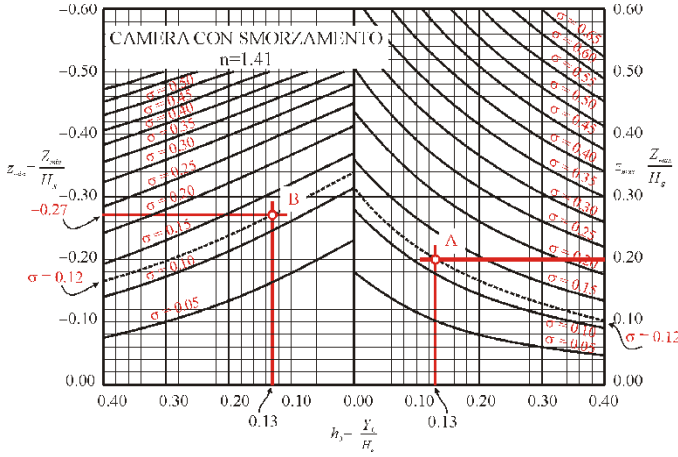


Figura 8.21. Diagramma per cassa con strozzatura ottima (modificata da Evangelisti, G., Il colpo d'ariete nelle condotte elevatorie munite di camera d'aria, *L'Energia Elettrica*, Settembre 1938)

Il volume di gas nella cassa in condizioni statiche (pompa spenta, fluido in quiete, carico pari a H_s) è pari a:

$$U_{s-opt} = \frac{\Omega L}{\sigma_{opt} H_s} \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\pi \times 0.4^2}{4} \times 1500 \times \frac{2.39^2}{2 \times 9.806} = 2.07 \text{ m}^3.$$

In corrispondenza si legge, sul diagramma a sinistra, $z_{min} = -0.27$.

Facendo uso della legge di trasformazione del gas, risulta $H_s U_s^n = H_{min} U_{max}^n$ e quindi:

$$U_{max-opt} = \frac{U_{s-opt}}{(1 + z_{min})^{1/n}} = \frac{2.07}{(1 - 0.27)^{1/1.41}} = 2.58 \text{ m}^3.$$

Inoltre:

$$U_{min-opt} = \frac{U_{s-opt}}{(1 + z_{max})^{1/n}} = \frac{2.07}{(1 + 0.20)^{1/1.41}} = 1.82 \text{ m}^3.$$

Il volume d'aria nella cassa con pompa accesa e carico pari a $H_s + Y_0$, è pari a:

$$U_{0-opt} = \frac{U_{s-opt}}{(1 + h_0)^{1/n}} = \frac{2.07}{(1 + 0.13)^{1/1.41}} = 1.90 \text{ m}^3.$$

Per verificare che non ci sia cavitazione deve risultare:

$$h_{min}^* = H_s (1 + z_{min}) = 220.33 \times (1 - 0.27) \equiv 160.8 \text{ m} > \frac{p_{atm}^*}{\gamma}.$$

La pressione relativa minima vale:

$$p_{min} = \gamma (h_{min}^* - 10.33) = 9806 \times (160.8 - 10.33) = 14.8 \text{ bar}.$$

Sarà sufficiente installare una cassa di volume totale pari a 3 m^3 . La strozzatura deve generare una perdita di carico all'istante iniziale pari a:

$$\Delta H = Y_0 + |Z_{min}| = Y_0 + |H_s z_{min}| = 28.8 + |220.33 \times (-0.27)| = 88.30 \text{ m.}$$

Il coefficiente di perdita di carico della strozzatura si calcola ricordando che:

$$\beta Q_0^2 = Y_0 + |Z_{min}| = Y_0 + |H_s z_{min}| \rightarrow \beta = \frac{Y_0 + |H_s z_{min}|}{Q_0^2}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\beta = \frac{Y_0 + |H_s z_{min}|}{Q_0^2} = \frac{28.8 + |220.33 \times (-0.27)|}{0.3^2} = 981.$$

La strozzatura si può realizzare con un restringimento con un tronco di diametro più piccolo nel collegamento tra la cassa e la condotta, in modo da generare una perdita di Borda per brusca espansione della corrente. Supponiamo che il tronco di collegamento abbia un diametro corrente pari a D . Il diametro del restringimento si calcola imponendo che:

$$\beta Q_0^2 = \underbrace{\frac{Q_0^2}{2g} \left(\frac{4}{\pi d^2} - \frac{4}{\pi D^2} \right)^2}_{\text{perdita di Borda}} \rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{D^2} + \frac{\pi}{4} \sqrt{2g\beta}.$$

Sostituendo i valori numerici, risulta:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{D^2} + \frac{\pi}{4} \sqrt{2g\beta} = \frac{1}{0.4^2} + \frac{\pi}{4} \sqrt{2 \times 9.806 \times 981} = 115.2 \rightarrow d = 0.093 \text{ m.}$$

Si noti che l'istallazione di una strozzatura ottima permette di ridurre notevolmente il volume della cassa d'aria.

In Figura 8.22 si riporta l'andamento della portata nella sezione immediatamente a valle della cassa (curva tratteggiata) e nella sezione del serbatoio (curva continua) in funzione del tempo adimensionale rispetto alla durata di fase della condotta.

L'inserto è un ingrandimento relativo alla prima fase. I diagrammi sono stati ottenuti con un programma di calcolo automatico numerico che include anche le oscillazioni elastiche. Per questo motivo la portata nella sezione del serbatoio comincia a risentire degli effetti della manovra di brusca interruzione dell'alimentazione solo dopo mezza durata di fase. In Figura 8.23 e 8.24 si riporta la pressione nella sezione immediatamente a valle della cassa e il volume d'aria nella cassa.

Nelle figure seguenti sono riportati gli stessi risultati per una cassa con strozzatura ottima, con $\beta = 981$. Si può osservare che la pressione minima è di poco superiore a 12 bar, mentre dai calcoli eseguiti sulla base del diagramma in Figura 8.21 risulterebbe pari a 14.8 bar. La discrepanza tra i due risultati è dovuta al fatto che il modello di calcolo automatico include anche gli effetti delle oscillazioni

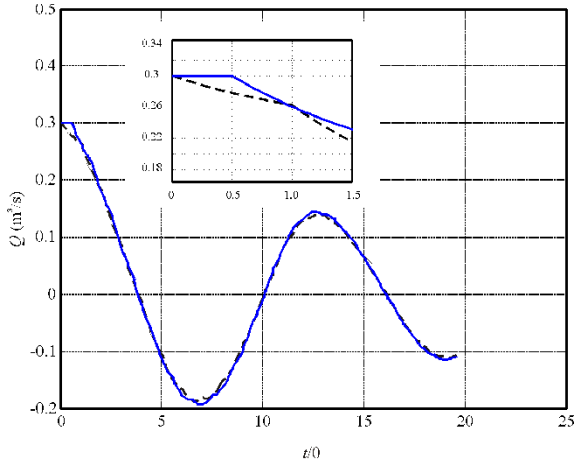


Figura 8.22. Portata nella sezione a valle della cassa (curva tratteggiata) e nella sezione del serbatoio (curva continua). Cassa senza strozzatura

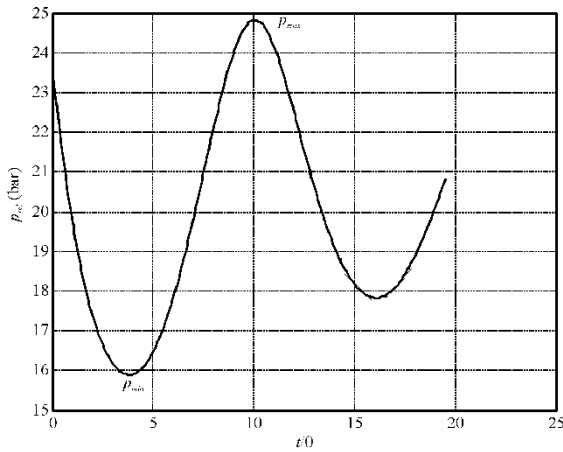


Figura 8.23. Pressione in condotta nella sezione a valle della cassa senza strozzatura

elastiche. Tali effetti determinano una riduzione di pressione alla fine della prima durata di fase (lo spegnimento della pompa equivale ad una manovra di chiusura), che si sovrappone alla riduzione di pressione associata all'oscillazione di massa. Per lo stesso motivo la pressione massima in condotta supera (anche se di poco) i 25 bar di progetto e le escursioni di volume d'aria nella cassa sono maggiori rispetto a quelle previste tramite gli abachi. Le oscillazioni si susseguono con periodo minore rispetto al caso di cassa senza strozzatura, e lo smorzamento è più rapido.

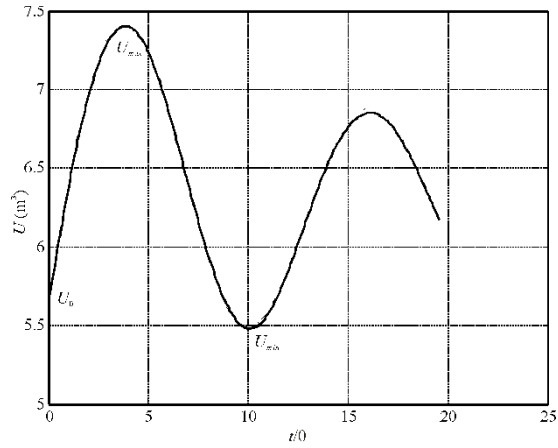


Figura 8.24. Volume d'aria nella cassa senza strozzatura

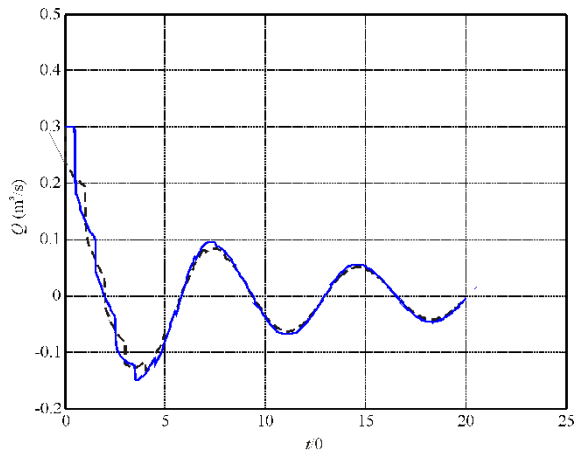


Figura 8.25. Portata nella sezione a valle della cassa (curva tratteggiata) e nella sezione del serbatoio (curva continua). Cassa con strozzatura ottima

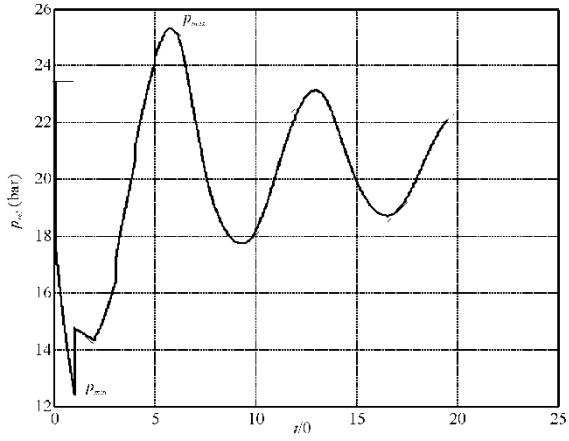


Figura 8.26. Pressione in condotta nella sezione a valle della cassa con strozzatura ottima

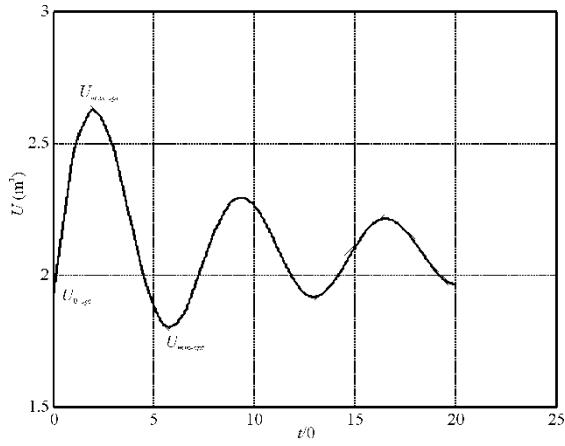


Figura 8.27. Volume d'aria nella cassa con strozzatura ottima

Correnti a pelo libero

Esercizio 9.1

Nel canale riportato in Figura 9.1 la canaletta centrale è caratterizzata da un coefficiente di Gauckler-Strickler $k_1 = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, la zona di espansione è caratterizzata da un coefficiente di Gauckler-Strickler $k_2 = (35 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. L'angolo è pari a $\alpha = (30 + C_{pu})^\circ$, il raggio è pari a $R = (1 + C_u/100) \text{ m}$ e la pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \%$.

- Tracciare la scala di deflusso ogni 50 cm, fino a $y_0 = 3 \text{ m}$.
- ◇ Si assuma una ripartizione tra le aree liquide indicata dalle verticali tratteggiate in Figura 9.1.

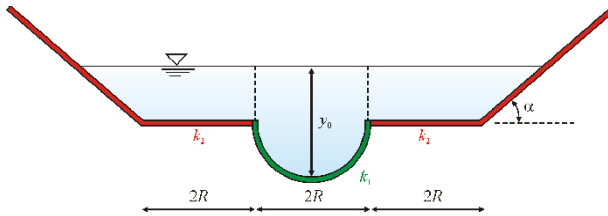


Figura 9.1. Sezione del canale

Soluzione

Se la profondità della corrente è minore di R , la corrente è contenuta nella canaletta centrale (Figura 9.2) e la scala di deflusso si calcola come segue:

$$Q = k_1 R_{idr}^{1/6} \Omega \sqrt{R_{idr} i_f} = k_1 R_{idr}^{2/3} \Omega \sqrt{i_f} = k_1 \sqrt{i_f} \frac{\Omega^{5/3}}{P^{2/3}} \quad y_0 < R.$$

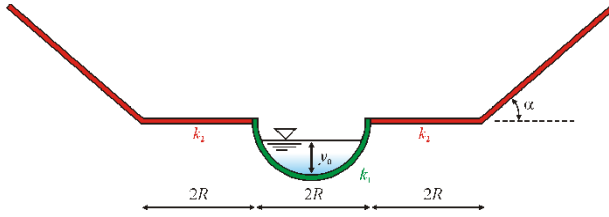


Figura 9.2. Sezione del canale con la corrente contenuta nella canaletta centrale

R_{idr} è il raggio idraulico, Ω è l'area della sezione trasversale della corrente, P è il perimetro bagnato.

Da considerazioni di geometria elementare, l'area della sezione trasversale della corrente e il perimetro bagnato sono pari a:

$$\begin{cases} \Omega = R^2 \cos^{-1} \left(\frac{R - y_0}{R} \right) - (R - y_0) \sqrt{R^2 - (R - y_0)^2} \\ P = 2R \cos^{-1} \left(\frac{R - y_0}{R} \right) \end{cases} \quad y_0 < R.$$

Nel caso in cui la corrente interessi la zona di espansione, la portata di moto uniforme si può calcolare come somma delle portate dei tre corpi idrici separati dalle verticali tratteggiate (Figura 9.3). Nel calcolo dei perimetri bagnati non si deve tenere conto dei contorni rappresentati dalle zone di separazione dei corpi idrici (le verticali tratteggiate), dato che la resistenza da questi offerta al moto è nulla per ipotesi. Si ricorda che il metodo della scabrezza equivalente deve essere applicato se non è immediata la suddivisione della corrente in corpi idrici separati, come nel caso di una sezione compatta caratterizzata da contorni di differente scabrezza (Citrini-Nosedà, p. 373).

Il corpo centrale contribuirà con una portata pari a:

$$Q_1 = k_1 R_{idr}^{1/6} \Omega \sqrt{R_{idr} i_f} = k_1 R_{idr}^{2/3} \Omega \sqrt{i_f} = k_1 \sqrt{i_f} \frac{\Omega^{5/3}}{P^{2/3}} \quad y_0 \geq R$$

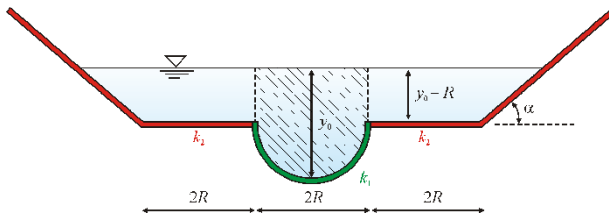


Figura 9.3. Suddivisione in corpi idrici

con

$$\begin{cases} \Omega = \frac{\pi R^2}{2} + 2R(y_0 - R) \\ P = \pi R \end{cases} \quad y_0 \geq R.$$

Il perimetro bagnato non varia e l'area della sezione trasversale della corrente cresce linearmente.

La zona di espansione contribuirà con una portata pari a:

$$Q_2 = 2 \left(k_2 R_{idr}^{1/6} \Omega \sqrt{R_{idr} i_f} \right) = 2 \left(k_2 R_{idr}^{2/3} \Omega \sqrt{i_f} \right) = 2 \left(k_2 \sqrt{i_f} \frac{\Omega^{5/3}}{P^{2/3}} \right) \quad y_0 \geq R.$$

con:

$$\begin{cases} \Omega = 2R(y_0 - R) + \frac{(y_0 - R)^2}{2 \tan \alpha} \\ P = 2R + \frac{(y_0 - R)}{\sin \alpha} \end{cases} \quad y_0 \geq R.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$k_1 = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, \quad k_2 = 35 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad R = 1.0 \text{ m}, \quad i_f = 0.3 \text{ } \%. \quad$$

I valori calcolati sono riportati in Tabella 9.1. Q_1 è il contributo del corpo idrico centrale, Q_2 è il contributo di ognuna delle due zone di espansione. La scala di deflusso è diagrammata in Figura 9.4.

Tabella 9.1. Scala di deflusso

y_0 (m)	Q_1 (m ³ /s)	$2 \times Q_2$ (m ³ /s)	Q (m ³ /s)
0.5	0.59	0	0.59
1.0	2.16	0	2.16
1.5	4.92	2×1.27	7.48
2.0	8.52	2×4.39	17.31
2.5	12.85	2×9.42	31.70
3.0	17.88	2×16.55	50.98

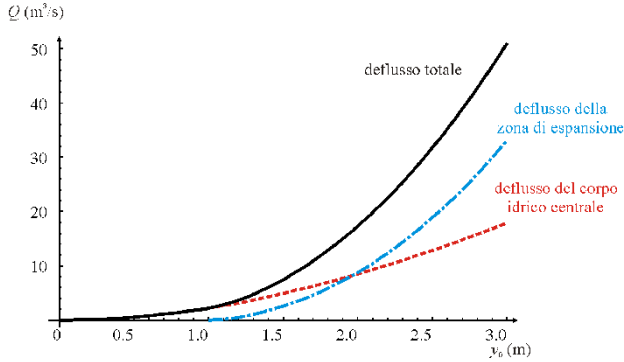


Figura 9.4. Scala di deflusso

Esercizio 9.2

Nel canale rettangolare in Figura 9.5 fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

Il fondo e le pareti hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. La pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \%$ e la larghezza è pari a $b = 6 \text{ m}$. Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza critica;
- l'altezza di moto uniforme che si instaura se si inserisce un setto verticale di spessore trascurabile e con scabrezza identica a quella delle altre pareti, come riportato in Figura 9.6.

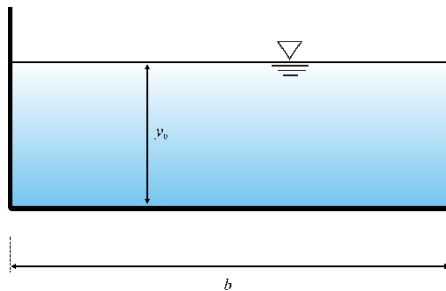


Figura 9.5. Sezione del canale

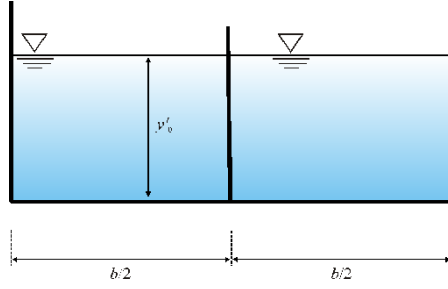


Figura 9.6. Sezione del canale a seguito dell'inserimento del setto di separazione

Soluzione

Applicando la legge di resistenza di Chezy, risulta:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\left(\frac{by_0}{b+2y_0}\right)^{2/3}by_0\sqrt{i_f}.$$

L'equazione precedente ammette solo una soluzione numerica.

L'altezza critica si calcola imponendo che l'energia specifica rispetto al fondo abbia un minimo:

$$\frac{\partial E}{\partial y}\bigg|_{y=y_c} = 0 \rightarrow 1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{\partial \Omega}{\partial y}\bigg|_{y=y_c} = 0.$$

Questa condizione richiede la soluzione dell'equazione seguente:

$$1 - \frac{Q^2}{g(by_c)^3}b = 0 \rightarrow y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}.$$

Inserendo un setto verticale in posizione intermedia, la portata si ripartisce, per simmetria, in parti uguali. Per ognuno dei due alvei, risulta:

$$\frac{Q}{2} = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\left(\frac{\frac{b}{2}y'_0}{\frac{b}{2}+2y'_0}\right)^{2/3}\frac{b}{2}y'_0\sqrt{i_f}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.3 \text{ ‰}, b = 6 \text{ m}.$$

$$Q = k \left(\frac{by_0}{b + 2y_0} \right)^{2/3} by_0 \sqrt{i_f} \rightarrow 60 = 40 \left(\frac{6y_0}{6 + 2y_0} \right)^{2/3} 6y_0 \sqrt{0.003} \rightarrow y_0 = 3.35 \text{ m}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{60^2}{9.806 \times 6^2}} = 2.17 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{2} &= k \left(\frac{\frac{b}{2}y'_0}{\frac{b}{2} + 2y'_0} \right)^{2/3} \frac{b}{2}y'_0 \sqrt{i_f} \rightarrow \\ \frac{60}{2} &= 40 \left(\frac{\frac{6}{2}y'_0}{\frac{6}{2} + 2y'_0} \right)^{2/3} \frac{6}{2}y'_0 \sqrt{0.003} \rightarrow y'_0 = 4.26 \text{ m}. \end{aligned}$$

Esercizio 9.3

Nel sistema in Figura 9.7 la paratoia separa il serbatoio da un alveo rettangolare di larghezza $B = 6 \text{ m}$.

- Calcolare la portata.
 - Determinare se l'alveo a valle è a debole o forte pendenza per la portata transitante.
 - Tracciare qualitativamente il profilo del pelo libero nell'alveo a valle.
- ◇ Si assuma $H = (6 + C_{pu}) \text{ m}$, $a = (0.6 + C_u/20) \text{ m}$ e un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler dell'alveo a valle $k = (40 + 2 \times C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. La pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/30) \text{ ‰}$. Il coefficiente di contrazione è pari a $C_c = 0.61$ e il coefficiente di efflusso è pari a $\mu = C_c \times C_v = 0.61 \times 0.98 \sim 0.60$. C_v è il coefficiente correttivo di velocità.

Soluzione

Applicando il Teorema di Bernoulli tra una sezione a monte della paratoia e la sezione contratta (nella quale si assume che le traiettorie siano rettilinee e parallele e la distribuzione di pressione sia, quindi, idrostatica) e trascurando le dissipazioni, risulta:

$$z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_m^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g}$$

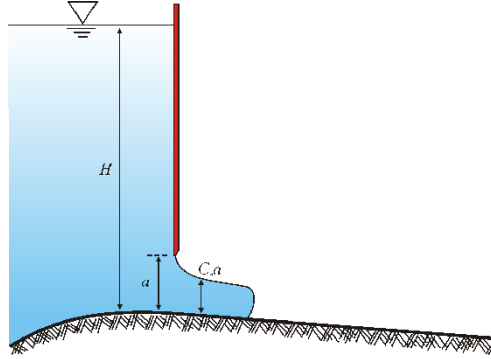


Figura 9.7. Efflusso sotto una paratoia piana verticale

e, assumendo una distribuzione idrostatica anche nella sezione a monte:

$$\underbrace{z_m + \frac{p_m}{\gamma}}_H + \frac{V_m^2}{2g} = \underbrace{z_c + \frac{p_c}{\gamma}}_{C_c a} + \frac{V_c^2}{2g} \rightarrow H + \frac{V_m^2}{2g} = C_c a + \frac{V_c^2}{2g}.$$

Definita q la portata per unità di larghezza dell'alveo, si può scrivere:

$$H + \frac{q^2}{2gH^2} = C_c a + \frac{q^2}{2g(C_c a)^2} \rightarrow q = \sqrt{\frac{2g(H - C_c a)}{\frac{1}{(C_c a)^2} - \frac{1}{H^2}}}$$

e, quindi, $Q = qB$.

Considerato che l'acqua proviene da un serbatoio, con buona approssimazione la velocità a monte V_m può essere trascurata; è così possibile applicare la nota formula dell'efflusso da luce sul fondo di un paratoia (Citriani §5.5):

$$Q = \mu A_{luce} \sqrt{2g(H - C_c a)}$$

in cui $A_{luce} = aB$ e $\mu = C_c C_v = 0.61 \times 0.98 \simeq 0.60$.

L'altezza di moto uniforme a valle si calcola applicando la formula di Chezy nell'espressione di Strickler, $Q = kR^{1/6} \Omega \sqrt{Ri_f}$, che per alveo rettangolare diventa:

$$Q = k \left(\frac{By_0}{B + 2y_0} \right)^{2/3} By_0 \sqrt{i_f}$$

da risolversi numericamente per tentativi rispetto a y_0 .

Per verificare lo stato della corrente (lenta o veloce), calcoliamo l'altezza critica:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

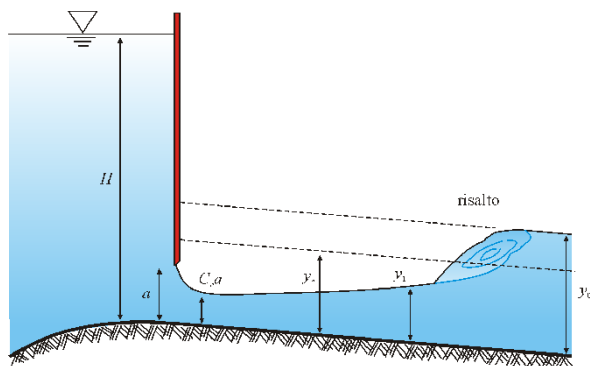


Figura 9.8. Profilo della corrente se l'alveo a valle è a debole pendenza

Nella sezione contratta la corrente non può che essere veloce (Citrini §10.8). Se la corrente di moto uniforme nell'alveo di valle è lenta, siamo certi che si formi un risalto idraulico a valle di un profilo di corrente veloce ritardata (profilo in Figura 9.8). Il risalto raccorda l'altezza di moto uniforme y_0 all'altezza coniugata y_1 .

Se, invece, la corrente di moto uniforme nell'alveo di valle è veloce, il moto uniforme si raggiunge asintoticamente verso valle, con un profilo di corrente veloce ritardata (profilo in Figura 9.9) o accelerata (profilo in Figura 9.10) in base al rapporto tra altezza nella sezione contratta e altezza di moto uniforme.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$H = 6 \text{ m}, a = 0.6 \text{ m}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.3 \text{ ‰}, C_c = 0.61, \mu = 0.60.$$

$$Q = \mu A_{luce} \sqrt{2g(H - C_c a)} = 0.60 \times 6 \times 0.6 \times \sqrt{2 \times 9.806 \times (6 - 0.61 \times 0.6)} \\ = 22.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{22.7}{6} = 3.78 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Risolvendo numericamente per tentativi l'equazione:

$$22.7 = 40 \left(\frac{6y_0}{6 + 2y_0} \right)^{2/3} 6y_0 \sqrt{0.003}$$

si calcola $y_0 = 1.65 \text{ m}$.

Inoltre:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{3.78^2}{9.806}} = 1.13 \text{ m}.$$

La corrente di moto uniforme a valle è lenta, poiché $y_0 > y_c$ e il profilo è quello riportato in Figura 9.8.

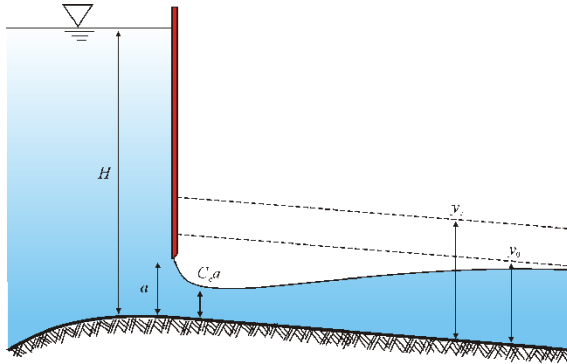


Figura 9.9. Profilo della corrente se l'alveo a valle è a forte pendenza e $C_c a < y_0$

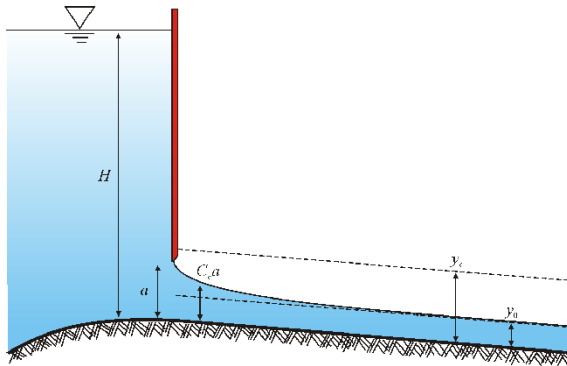


Figura 9.10. Profilo della corrente se l'alveo a valle è a forte pendenza e $C_c a > y_0$

Esercizio 9.4

Il getto d'acqua in uscita da un rubinetto, incidendo su un piatto piano orizzontale, forma un risalto idraulico alla distanza $r = (5 + C_{pu}/2)$ cm dall'asse. La profondità della corrente radiale a monte del risalto è pari a $y_1 = (0.1 + C_u)$ cm, a valle del risalto è pari a $y_2 = (0.5 + C_u)$ cm.

- Calcolare la portata d'acqua in uscita dal rubinetto.
- ◇ Si tratti il risalto come se avvenisse in alveo cilindrico rettangolare.

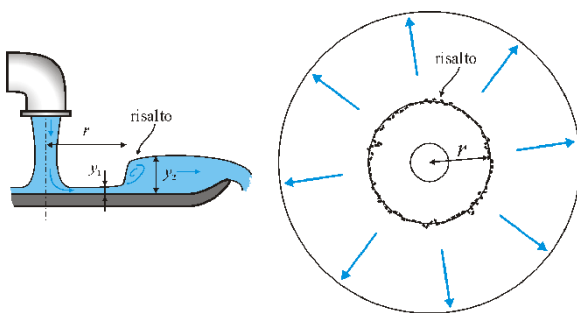


Figura 9.11. Risalto circolare

Soluzione

Scelto il volume di controllo riportato in Figura 9.12, scriviamo l'equazione di bilancio della quantità di moto e di conservazione della massa. Π_1 , Π_2 e Π_{lat} rappresentano le spinte dovute alla pressione. Stiamo trascurando la resistenza al fondo. In particolare, se si analizza il risalto come se avvenisse in un alveo cilindrico rettangolare, possiamo trascurare le componenti della spinta laterale Π_{lat} in direzione radiale. Quindi, la relazione tra le altezze coniugate di monte e

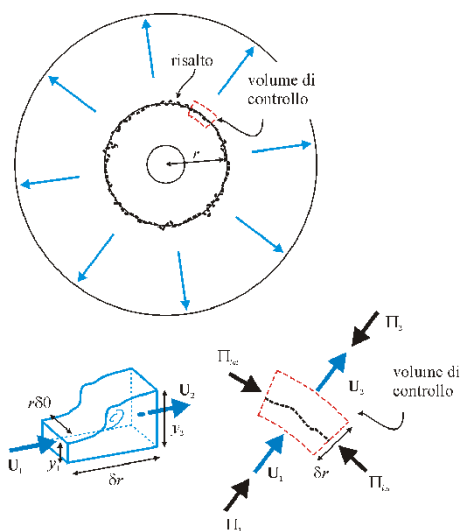


Figura 9.12. Schema per il calcolo del risalto

di valle è quella classica per alveo rettangolare cilindrico:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_1^2} \right)$$

$$\text{Fr}_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gy_1}}.$$

Fr_1 è il numero di Froude della corrente di monte (veloce). Poiché sono assegnate le due altezze coniugate, possiamo calcolare Fr_1 :

$$\text{Fr}_1 = \sqrt{\frac{1}{8} \left[\left(2 \frac{y_2}{y_1} + 1 \right)^2 - 1 \right]}$$

e il modulo della velocità U_1 . La portata è pari a $Q = 2\pi r y_1 U_1$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$r = 5 \text{ cm}$, $y_1 = 0.1 \text{ cm}$, $y_2 = 0.5 \text{ cm}$

$$\text{Fr}_1 = \sqrt{\frac{1}{8} \left[\left(2 \frac{y_2}{y_1} + 1 \right)^2 - 1 \right]} = \sqrt{\frac{1}{8} \times \left[\left(2 \times \frac{0.5}{0.1} + 1 \right)^2 - 1 \right]} = 3.87$$

$$U_1 = \text{Fr} \sqrt{gy_1} = 3.87 \times \sqrt{9.806 \times 0.001} = 0.38 \text{ m/s}$$

$$Q = 2\pi r y_1 U_1 = 2 \times \pi \times 0.05 \times 0.001 \times 0.38 = 0.12 \text{ l/s}.$$

Esercizio 9.5

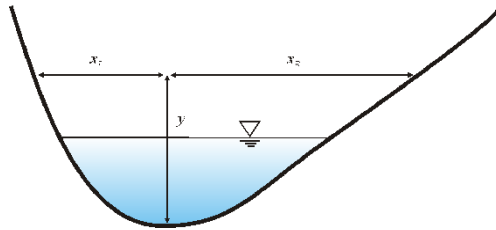
La sezione in Figura 9.13, con caratteristiche geometriche riportate in Tabella 9.2, si riferisce ad un canale a pelo libero a pendenza $i_f = (2 + C_{pu}/30) \%$ e scabrezza delle pareti secondo Gauckler-Strickler $k = (40 + 2 \times C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. La portata è pari a $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$. Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza critica.

◇ Suggerimento: interpolare linearmente i dati geometrici della tabella.

Tabella 9.2. Caratteristiche geometriche della sezione trasversale dell'alveo

y (m)	x_L (m)	x_R (m)
0	0	0
1.0	1.50	1.10
2.0	2.60	2.00
3.0	3.25	3.30
4.0	3.60	5.50
5.0	3.85	8.20
6.0	4.00	10.0

**Figura 9.13.** Sezione trasversale dell'alveo**Soluzione**

Costruiamo la scala di deflusso imponendo l'altezza di moto uniforme e calcolando la portata. In corrispondenza di un valore di altezza di moto uniforme $y_0 = 1.0$ m, la sezione trasversale ha area della superficie pari a:

$$\Omega = \frac{x_L + x_R}{2} y = \frac{1.5 + 1.1}{2} \times 1.0 = 1.3 \text{ m}^2.$$

Il perimetro bagnato è pari a:

$$P = \sqrt{x_L^2 + y^2} + \sqrt{x_R^2 + y^2} = \sqrt{1.5^2 + 1.0^2} + \sqrt{1.1^2 + 1.0^2} = 3.29 \text{ m}.$$

Il raggio idraulico è pari a:

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{1.3}{3.29} = 0.40 \text{ m}.$$

La portata è pari a:

$$Q = kR^{1/6} \Omega \sqrt{Ri_f}.$$

Per ogni altezza maggiore di 1.0 m conviene aggiungere i nuovi contributi di area e perimetro bagnato ai valori precedentemente calcolati. Tali contributi sono schematizzati come superfici di forma trapezia. Ad esempio, per $y = 2.0$ m:

$$\Delta\Omega = \frac{(x_L(2.0) + x_R(2.0)) + (x_L(1.0) + x_R(1.0))}{2} \times 1.0$$

$$\Delta P = \sqrt{(x_L(2.0) - x_L(1.0))^2 + 1.0^2} + \sqrt{(x_R(2.0) - x_R(1.0))^2 + 1.0^2}.$$

Tabella 9.3. Grandezze caratteristiche della corrente nell'alveo per tirante idrico crescente. Condizioni di moto uniforme

y_0 (m)	x_L (m)	x_R (m)	Ω (m ²)	P (m)	R (m)	Q_0 (m ³ /s)
1.0	1.50	1.10	1.30	3.29	0.40	3.96
2.0	2.60	2.00	4.90	6.12	0.80	23.90
3.0	3.25	3.30	10.48	8.95	1.17	65.79
4.0	3.60	5.50	18.30	12.43	1.47	133.97
5.0	3.85	8.20	28.88	16.34	1.77	238.75
6.0	4.00	10.00	41.90	19.41	2.16	395.89

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$i_f = 2 \text{ ‰}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}.$$

All'altezza $y_0 = 1.0$ m corrisponde la portata seguente:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = 40 \times 0.40^{1/6} \times 1.3 \times \sqrt{0.40 \times 0.02} = 3.96 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Eseguendo i calcoli per tirante idrico crescente, si ottengono i risultati riportati in Tabella 9.3.

Per la portata $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, l'altezza di moto uniforme si calcola interpolando tra $y_0 = 2.0$ m e $y_0 = 3.0$ m.

Per il calcolo dell'altezza critica, conviene tabellare il valore della portata critica per assegnata geometria della corrente. La condizione critica per una corrente a pelo libero è la seguente:

$$1 - \frac{Q_c^2}{g\Omega_c^3}B_c = 0 \rightarrow Q_c = \sqrt{\frac{g\Omega_c^3}{B_c}}.$$

Il pedice c indica che il valore si riferisce alla condizione critica. B_c è la larghezza del pelo libero in condizioni critiche. Eseguendo i calcoli per altezza critica crescente, si ottengono i risultati riportati in Tabella 9.4.

Per la portata $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$, l'altezza critica si calcola interpolando tra $y_c = 3.0$ m e $y_c = 4.0$ m. La corrente è veloce poiché sicuramente $y_0 < y_c$. In Figura 9.14 sono diagrammate la scala di deflusso e la scala della portata critica.

Tabella 9.4. Grandezze caratteristiche della corrente nell'alveo per tirante idrico crescente. Condizioni critiche

y_c (m)	x_L (m)	x_R (m)	Ω_c (m ²)	B_c (m)	Q_c (m ³ /s)
1.0	1.50	1.10	1.30	2.60	2.88
2.0	2.60	2.00	4.90	4.60	15.84
3.0	3.25	3.30	10.48	6.55	41.48
4.0	3.60	5.50	18.30	9.10	81.26
5.0	3.85	8.20	28.88	12.05	139.97
6.0	4.00	10.00	41.90	14.00	226.99

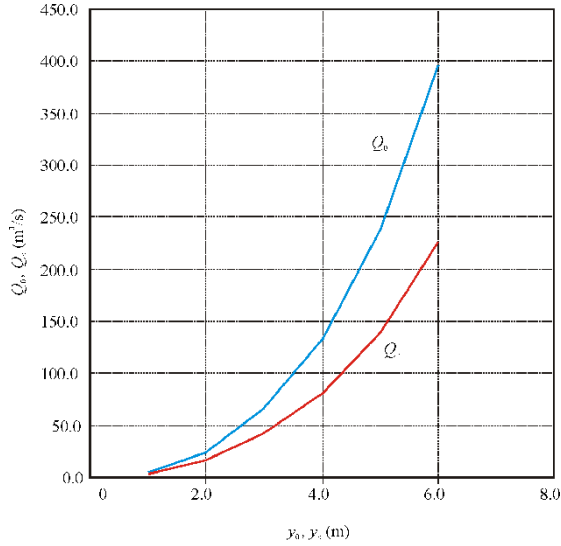


Figura 9.14. Scala di deflusso e della portata critica

Esercizio 9.6

Nel sistema in Figura 9.15 la paratoia separa il serbatoio da un alveo che si può assumere infinitamente largo.

- Calcolare la portata per unità di larghezza.
 - Calcolare l'altezza di moto uniforme a valle y_0 .
 - Verificare se si forma il risalto idraulico e, in caso affermativo, calcolare l'altezza coniugata del risalto idraulico y_1 .
- ◇ Si assuma $H = (6 + C_{pu})$ m, $a = (0.6 + C_u/20)$ m e un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler dell'alveo a valle $k = (40 + 2 \times C_{pu})$ m^{1/3}/s. La pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/30)$ %. Il coefficiente di contrazione è $C_c = 0.61$.

Soluzione

Applicando il Teorema di Bernoulli tra una sezione a monte della paratoia e la sezione contratta e trascurando le dissipazioni, risulta:

$$z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_m^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g}$$

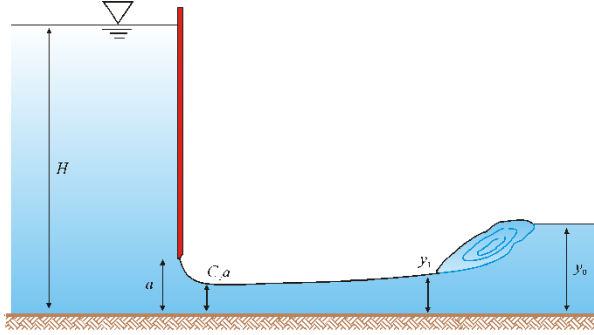


Figura 9.15. Profilo della corrente a valle della luce di una paratoia verticale piana

e, per la distribuzione idrostatica nelle due sezioni:

$$\underbrace{z_m + \frac{p_m}{\gamma}}_H + \frac{V_m^2}{2g} = \underbrace{z_c + \frac{p_c}{\gamma}}_{C_c a} + \frac{V_c^2}{2g} \rightarrow H + \frac{V_m^2}{2g} = C_c a + \frac{V_c^2}{2g}.$$

Definita la portata per unità di larghezza q , si può scrivere:

$$H + \frac{q^2}{2gH^2} = C_c a + \frac{q^2}{2g(C_c a)^2} \rightarrow q = \sqrt{\frac{2g(H - C_c a)}{\frac{1}{(C_c a)^2} - \frac{1}{H^2}}}.$$

L'altezza di moto uniforme a valle si calcola applicando la formula di Chezy con il coefficiente di Strickler, $Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f}$ che, per alveo molto largo, si riduce a:

$$q = ky_0^{5/3}\sqrt{i_f}$$

e, quindi:

$$y_0 = \frac{q^{3/5}}{k^{3/5}i_f^{3/10}}.$$

Per verificare lo stato della corrente di valle (lenta o veloce), calcoliamo l'altezza critica:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

Dopo aver verificato che la corrente in uscita dalla paratoia sia veloce e la corrente di moto uniforme nell'alveo sia lenta, siamo certi che si formi un risalto idraulico. Per calcolare l'altezza coniugata di y_0 , imponiamo l'equilibrio della spinta totale per unità di larghezza:

$$\frac{1}{2}\gamma y_1^2 + \rho \frac{q^2}{y_1} = \frac{1}{2}\gamma y_0^2 + \rho \frac{q^2}{y_0}$$

che può essere riscritto nella forma seguente:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_0^2} \right).$$

Fr_0 è il numero di Froude della corrente lenta di valle, $\text{Fr}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gy_0}}$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$H = 6$ m, $a = 0.6$ m, $k = 40$ m^{1/3}/s, $i_f = 0.3$ ‰, $C_c = 0.61$.

$$q = \sqrt{\frac{2g(H - C_c a)}{\frac{1}{(C_c a)^2} - \frac{1}{H^2}}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times (6 - 0.61 \times 0.6)}{\frac{1}{(0.61 \times 0.6)^2} - \frac{1}{6^2}}} = 3.85 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$y_0 = \frac{q^{3/5}}{k^{3/5} i_f^{3/10}} = \frac{3.85^{3/5}}{40^{3/5} \times 0.003^{3/10}} = 1.40 \text{ m}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{3.85^2}{9.806}} = 1.14 \text{ m}.$$

La corrente di moto uniforme a valle è lenta, poiché $y_0 > y_c$. La velocità di moto uniforme a valle è $V_0 = \frac{q}{y_0} = \frac{3.85}{1.40} = 2.74$ m/s e il numero di Froude a valle è pari a:

$$\text{Fr}_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gy_0}} = \frac{2.75}{\sqrt{9.806 \times 1.4}} = 0.74.$$

L'altezza coniugata a monte è pari a:

$$y_1 = \frac{y_0}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}_0^2} \right) = \frac{1.40}{2} \times \left(-1 + \sqrt{1 + 8 \times 0.74^2} \right) = 0.93 \text{ m}.$$

Esercizio 9.7

Il canale cilindrico, la cui sezione trasversale è rappresentata in Figura 9.16 (disegno in scala), convoglia la portata Q , ha pendenza di fondo costante e pari a i_f e scabrezza uniforme sulle pareti e sul fondo definita dall'indice di scabrezza di Strickler k .

- Determinare, per la portata assegnata Q , l'altezza di moto uniforme e l'altezza critica.

◇ Dati numerici: $Q = (300 + 0.1 \times C_u)$ m³/s, $k = (50 + 0.5 \times C_{pu})$ m^{1/3}/s, $i_f = (0.05 + 0.005 \times C_u)$ ‰.

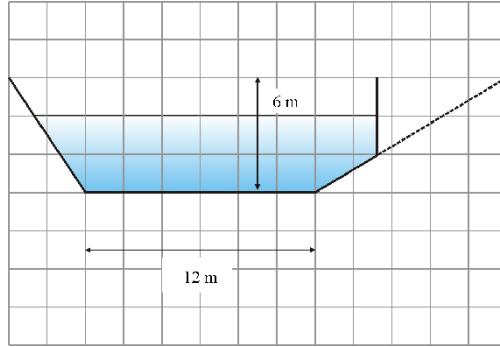


Figura 9.16. Sezione del canale

Soluzione

La legge di resistenza adottata è la seguente:

$$Q = kR^{2/3}\Omega\sqrt{i_f}$$

e, per la sezione in Figura 9.16, risulta:

$$Q = k \frac{\left[\left(2b_0 + \frac{7}{3}y_0 \right) \frac{y_0}{2} \right]^{5/3}}{\left[b_0 + \frac{y_0}{3} (\sqrt{13} + \sqrt{34}) \right]^{2/3}} \sqrt{i_f} \quad \text{per } 0 < y_0 < 2 \text{ m}$$

$$Q = k \frac{\left[\left(2b_0 + \frac{14}{3} \right) + (y_0 - 2) \left(b_0 + \frac{14}{3} \right) + \frac{(y_0 - 2)^2}{3} \right]^{5/3}}{\left[b_0 + \frac{y_0}{3} \sqrt{13} + \frac{2}{3} \sqrt{34} + (y_0 - 2) \right]^{2/3}} \sqrt{i_f} \quad \text{per } y_0 \geq 2 \text{ m}.$$

L'energia specifica rispetto al fondo è pari a:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}.$$

In condizioni critiche risulta:

$$\frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y=y_c} \equiv 1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_{y=y_c} = 0$$

e, per la sezione in Figura 9.16, risulta:

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_{y=y_c} \equiv 1 - \frac{72Q^2}{gy_c^3} \frac{(3b_0 + 7y_c)}{(6b_0 + 7y_c)^3} = 0 \quad \text{per } 0 < y_c < 2 \text{ m}$$

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \Big|_{y=y_c} \equiv 1 - \frac{9Q^2 (3b_0 + 2y_c + 10)}{g(y_c^2 + 10y_c + 3b_0y_c - 10)^3} = 0 \quad \text{per } y_c \geq 2 \text{ m}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}, k = 50 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.05 \text{ } \%$$

L'altezza di moto uniforme è pari a $y_0 = 6.41 \text{ m}$. L'altezza critica è pari a $y_c = 3.51 \text{ m}$. La corrente è lenta, poiché $y_c < y_0$.

Esercizio 9.8

Nel canale riportato in Figura 9.17, di larghezza $b = 12 \text{ m}$, fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

Le pareti hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e la pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \text{ } \%$. Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza critica;
- l'altezza coniugata del risalto idraulico.

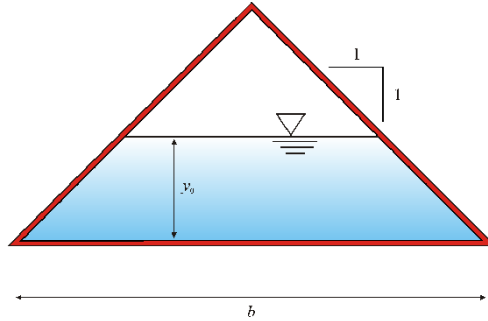


Figura 9.17. Sezione del canale

Soluzione

L'altezza di moto uniforme si calcola applicando la formula di Chezy:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\frac{(by_0 - y_0^2)^{5/3}}{(b + 2\sqrt{2}y_0)^{2/3}}\sqrt{i_f}.$$

L'altezza critica si calcola imponendo il minimo della funzione energia specifica rispetto al fondo:

$$\left.\frac{\partial E}{\partial y}\right|_{y=y_c} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3}b'_c = 0.$$

b'_c è la larghezza del pelo libero in condizioni critiche.

Sostituendo:

$$1 - \frac{Q^2}{g (by_c - y_c^2)^3} (b - 2y_c) = 0.$$

L'altezza coniugata si ottiene imponendo l'equilibrio della spinta totale:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_0^2 (b - 2y_0)}_{\text{spinta della porzione rettangolare}} + \underbrace{\frac{2}{3}\gamma y_0^3}_{\text{spinta delle porzioni triangolari}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{(by_0 - y_0^2)}}_{\text{flusso di quantità di moto}} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_1^2 (b - 2y_1)}_{\text{spinta della porzione rettangolare}} + \underbrace{\frac{2}{3}\gamma y_1^3}_{\text{spinta delle porzioni triangolari}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{(by_1 - y_1^2)}}_{\text{flusso di quantità di moto}}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.3 \text{ \%}.$$

La scala di deflusso ha l'andamento riportato in Figura 9.18, con un massimo per $y_0 = 5.25 \text{ m}$, corrispondente all' 87.5% del massimo tirante.

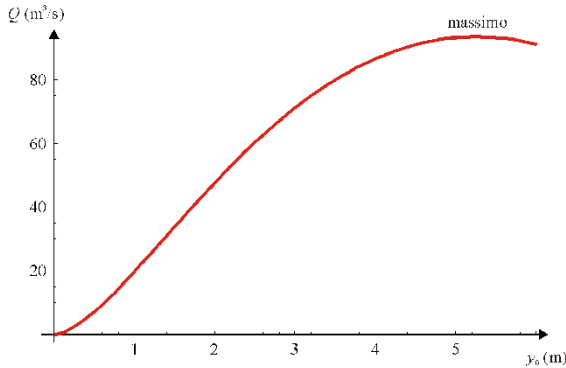


Figura 9.18. Scala di deflusso

L'altezza di moto uniforme è pari a $y_0 = 2.49 \text{ m}$. L'altezza critica è pari a $y_c = 1.41 \text{ m}$. La corrente è lenta. L'altezza coniugata, in corrente veloce, è pari a $y_1 = 0.73 \text{ m}$.

Esercizio 9.9

Nel canale riportato in Figura 9.19 fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

Le pareti hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e la pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \%$.

Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza critica;
- l'altezza coniugata del risalto idraulico.

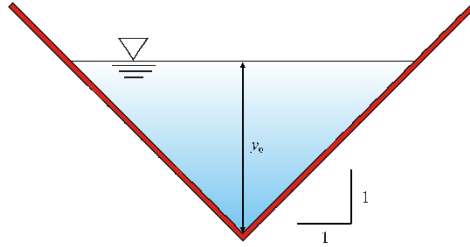


Figura 9.19. Sezione del canale

Soluzione

Assumendo una legge di resistenza del tipo seguente:

$$Q = kR^{2/3}\Omega\sqrt{i_f}$$

per la sezione in Figura 9.19, risulta:

$$Q = k \frac{y_0^{8/3}}{(2\sqrt{2})^{2/3}} \sqrt{i_f} \rightarrow y_0 = \left[\frac{Q (2\sqrt{2})^{2/3}}{k \sqrt{i_f}} \right]^{3/8}.$$

L'energia specifica rispetto al fondo è pari a:

$$E = y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}.$$

In condizioni critiche risulta:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial y} \right|_{y=y_c} \equiv 1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right|_{y=y_c} = 0$$

e, per la sezione in Figura 9.19, risulta:

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right|_{y=y_c} \equiv 1 - \frac{Q^2}{gy_c^6} 2y_c = 0 \rightarrow y_c = \left(\frac{2Q^2}{g} \right)^{1/5}.$$

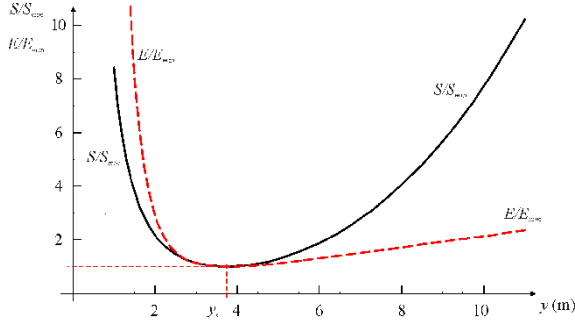


Figura 9.20. Diagramma dell'energia specifica e della spinta totale

L'altezza coniugata si calcola imponendo il bilancio della quantità di moto:

$$S = p_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = \text{costante} \rightarrow \gamma \frac{y_0^3}{3} + \rho \frac{Q^2}{y_0^2} = \gamma \frac{y_1^3}{3} + \rho \frac{Q^2}{y_1^2}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.3 \text{ } \%.$$

L'altezza di moto uniforme è pari a:

$$y_0 = \left[\frac{Q (2\sqrt{2})^{2/3}}{k \sqrt{i_f}} \right]^{3/8} = \left[\frac{60 \times (2 \times \sqrt{2})^{2/3}}{40 \times \sqrt{\frac{0.3}{100}}} \right]^{3/8} = 4.49 \text{ m.}$$

L'altezza critica è pari a:

$$y_c = \left(\frac{2Q^2}{g} \right)^{1/5} = \left(\frac{2 \times 60^2}{9.806} \right)^{1/5} = 3.74 \text{ m.}$$

La corrente è lenta, poiché $y_c < y_0$.

L'altezza coniugata del risalto si calcola imponendo il bilancio della spinta totale con la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{y_0^3}{3} + \rho \frac{Q^2}{y_0^2} &= \gamma \frac{y_1^3}{3} + \rho \frac{Q^2}{y_1^2} \rightarrow \\ 9806 \times \frac{4.49^3}{3} + 1000 \times \frac{60^2}{4.49^2} &= 9806 \times \frac{y_1^3}{3} + 1000 \times \frac{60^2}{y_1^2} \end{aligned}$$

e, risolvendo, risulta $y_1 = 3.08 \text{ m}$. La corrente è veloce.

In Figura 9.20 si riportano i diagrammi della spinta totale S e dell'energia specifica E rispetto al fondo della corrente nell'alveo a sezione triangolare, adimensionali rispetto al loro valore minimo. Assumendo unitari i coefficienti correttivi di Coriolis e di Boussinesq, per le due funzioni il minimo coincide e si raggiunge nella condizione critica.

Esercizio 9.10

Nel canale riportato in Figura 9.21 fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

La base è pari a $b = (6 + C_{pu}) \text{ m}$, le pareti e il fondo hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e la pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \%$. Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza critica;
- l'altezza coniugata del risalto idraulico.

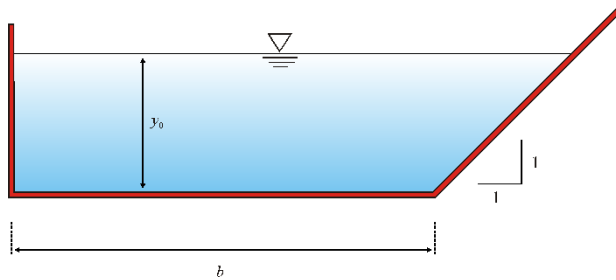


Figura 9.21. Sezione del canale

Soluzione

L'altezza di moto uniforme si calcola applicando la formula di Chezy:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\frac{\left(by_0 + \frac{y_0^2}{2}\right)^{5/3}}{(b + y_0 + \sqrt{2}y_0)^{2/3}}\sqrt{i_f}$$

da risolversi numericamente per tentativi.

L'altezza critica si ottiene annullando la derivata dell'energia specifica rispetto al fondo:

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{d\Omega}{dy} \Big|_{y=y_c} = 0 \rightarrow 1 - \frac{Q^2}{g\left(by_c + \frac{y_c^2}{2}\right)^3} (b + y_c) = 0$$

da risolversi numericamente per tentativi.

L'altezza coniugata si ottiene imponendo l'equilibrio della spinta totale:

$$\begin{array}{ccccc}
 \underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_0^2 b}_{\text{spinta della}} & + & \underbrace{\frac{1}{6}\gamma y_0^3}_{\text{spinta della}} & + & \underbrace{\rho \frac{Q^2}{\left(b y_0 + \frac{y_0^2}{2}\right)}}_{\text{flusso di quantità di moto}} = \\
 \text{porzione rettangolare} & & \text{porzione triangolare} & & \\
 \\
 \underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_1^2 b}_{\text{spinta della}} & + & \underbrace{\frac{1}{6}\gamma y_1^3}_{\text{spinta della}} & + & \underbrace{\rho \frac{Q^2}{\left(b y_1 + \frac{y_1^2}{2}\right)}}_{\text{flusso di quantità di moto}} \\
 \text{porzione rettangolare} & & \text{porzione triangolare} & &
 \end{array}$$

da risolversi numericamente per tentativi.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}, b = 6 \text{ m}, k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.3 \text{ } \%$$

$$y_0 = 2.72 \text{ m}, y_c = 2.04 \text{ m}, y_1 = 1.48 \text{ m}.$$

Esercizio 9.11

Nel canale riportato in Figura 9.22 fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

La base è pari a $b = 6 \text{ m}$, le pareti hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e la pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \text{ } \%$. Calcolare:

- l'altezza di moto uniforme;
- l'altezza coniugata del risalto idraulico.

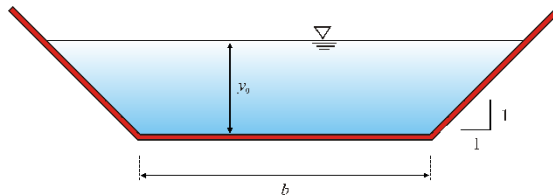


Figura 9.22. Sezione del canale

Soluzione

L'altezza di moto uniforme si calcola applicando la formula di Chezy:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\frac{(by_0 + y_0^2)^{5/3}}{(b + 2\sqrt{2}y_0)^{2/3}}\sqrt{i_f}.$$

L'altezza critica si ottiene annullando la derivata dell'energia specifica rispetto al fondo:

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega_c^3} \frac{d\Omega}{dy} \Big|_{y=y_c} = 0 \rightarrow 1 - \frac{Q^2}{g(by_c + y_c^2)^3} (b + 2y_c) = 0$$

da risolversi numericamente per tentativi.

L'altezza coniugata si ottiene imponendo l'equilibrio della spinta totale:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_0^2 b}_{\text{spinta della porzione rettangolare}} + \underbrace{\frac{1}{3}\gamma y_0^3}_{\text{spinta delle porzioni triangolari}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{(by_0 + y_0^2)}}_{\text{flusso di quantità di moto}} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\gamma y_1^2 b}_{\text{spinta della porzione rettangolare}} + \underbrace{\frac{1}{3}\gamma y_1^3}_{\text{spinta delle porzioni triangolari}} + \underbrace{\rho \frac{Q^2}{(by_1 + y_1^2)}}_{\text{flusso di quantità di moto}}.$$

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, $i_f = 0.3 \text{ ‰}$, $y_0 = 2.40 \text{ m}$, $y_1 = 1.52 \text{ m}$, $y_c = 1.94 \text{ m}$.

In Figura 9.23 sono riportati la spinta totale in funzione del tirante idrico e i due valori di altezza coniugata.

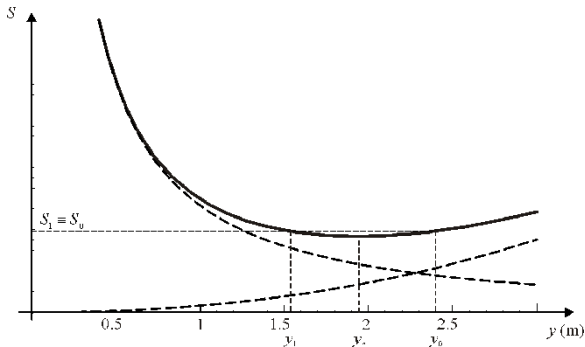


Figura 9.23. Diagramma della spinta totale

Esercizio 9.12

Nel canale riportato in Figura 9.24 fluisce una portata $Q = (60 + C_u) \text{ m}^3/\text{s}$.

Il fondo \overline{BD} ha un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k_{BD} = (30 + C_u) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, tutte le altre pareti hanno un coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = (40 + C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. La pendenza del fondo è $i_f = (0.3 + C_{pu}/20) \%$.

- Calcolare l'altezza di moto uniforme.

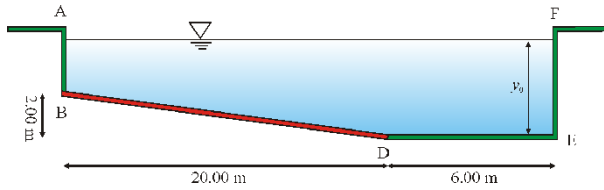


Figura 9.24. Sezione del canale

Soluzione

Imponendo che la resistenza complessiva dell'alveo sia data dalla somma dei contributi dovuti alle diverse parti del perimetro bagnato, una scabrezza equivalente può essere valutata come:

$$k_{seq} = \sqrt{\frac{P}{\sum \frac{P_i}{k_{si}^2}}}$$

in cui P_i indica la lunghezza del contorno con indice di scabrezza k_{si} . Si noti che in letteratura esistono altri metodi ugualmente accettabili per il calcolo di k_{seq} .

Nel caso in esame, risulta:

$$k_{seq} = \left(\frac{\frac{y_0 + 6 + y_0\sqrt{101}}{y_0 + 6} + \frac{y_0\sqrt{101}}{k_{BD}^2}}{k^2} \right)^{1/2} \quad \text{per } y_0 < 2 \text{ m}$$

e:

$$k_{seq} = \left(\frac{\frac{2y_0 + 4 + 2\sqrt{101}}{2y_0 + 4} + \frac{2\sqrt{101}}{k_{BD}^2}}{k^2} \right)^{1/2} \quad \text{per } y_0 \geq 2 \text{ m}.$$

Per l'applicazione della formula precedente, non è necessario fare alcuna ipotesi sulla suddivisione della sezione.

La portata si ottiene dalla legge di resistenza di Chezy:

$$Q = k_{seq} R^{1/6} \Omega \sqrt{R i_f} = \left(\frac{y_0 + 6 + y_0 \sqrt{101}}{k^2} + \frac{y_0 \sqrt{101}}{k_{BD}^2} \right)^{1/2} \frac{(6y_0 + 5y_0^2)^{5/3}}{(y_0 + 6 + y_0 \sqrt{101})^{2/3}} \sqrt{i_f}$$

per $y_0 \leq 2 \text{ m}$

ovvero:

$$Q = k_{seq} R^{1/6} \Omega \sqrt{R i_f} = \left(\frac{2y_0 + 4 + 2\sqrt{101}}{k^2} + \frac{2\sqrt{101}}{k_{BD}^2} \right)^{1/2} \frac{(26y_0 - 20)^{5/3}}{(2y_0 + 4 + 2\sqrt{101})^{2/3}} \sqrt{i_f}$$

per $y_0 > 2 \text{ m}$.

L'altezza di moto uniforme si calcola per tentativi.

Per $C_u = C_{pu} = 0$, risulta

$k_{BD} = 30 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, $k = 40 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, $i_f = 0.3\%$ e si calcola $y_0 = 1.98 \text{ m}$.

Esercizio 9.13

Il canale cilindrico in Figura 9.25 ha il fondo inclinato verso la sponda destra e pareti verticali. L'inclinazione del fondo ha una scarpa n_s e la sponda sinistra è alta f . La pendenza di fondo è costante e pari a i_f ; la scabrezza di Strickler vale k .

Calcolare con intervallo di altezza di 1.0 m (e fino a 4.0 m dal punto più depresso della sezione):

- la scala delle portate di moto uniforme;
- la scala delle portate critiche.

◇ Dati numerici:

$$B = (8 + C_u \times 0.1) \text{ m}, f = (3 + C_u) \text{ m}, n_s = (4 + C_{pu}/10) \text{ m}, i_f = (0.5 + 0.5 \times C_u) \%, k = (35 + C_{pu} \times 5) \text{ m}^{1/3}/\text{s}.$$

Soluzione

La sezione è triangolare per $0 < y_0 \leq B/n_s$. In tal caso, la larghezza del pelo libero è pari a $b = y_0 n_s$, l'area è pari a $\Omega = y_0^2 n_s / 2$, il perimetro bagnato è pari a:

$$P = y_0 + y_0 \sqrt{1 + n_s^2}.$$

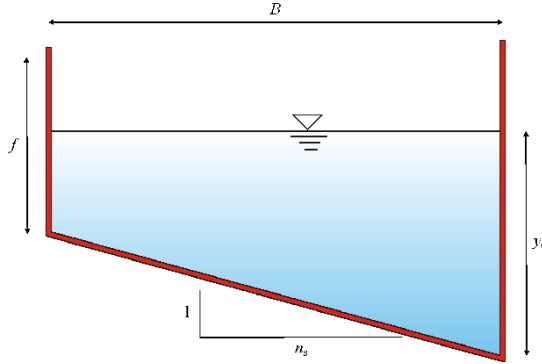


Figura 9.25. Sezione del canale

Il raggio idraulico è pari a:

$$R = \frac{y_0 n_s}{2 + 2\sqrt{1 + n_s^2}}.$$

La sezione è trapezia per $y_0 > B/n_s$. In tal caso, la larghezza del pelo libero è pari a B , l'area è pari a:

$$\Omega = By_0 - B^2/(2n_s)$$

il perimetro bagnato è pari a:

$$P = 2y_0 - B/n_s + B\sqrt{1 + 1/n_s^2}.$$

Il raggio idraulico è pari a:

$$R = \frac{By_0 - B^2/(2n_s)}{2y_0 - B/n_s + B\sqrt{1 + 1/n_s^2}}.$$

La portata di moto uniforme si calcola utilizzando la formula di Chezy:

$$Q = kR^{2/3}\Omega\sqrt{i_f}.$$

La scala delle portate critiche si può calcolare imponendo il minimo dell'energia specifica per ottenere y_c , assegnato Q :

$$1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \Big|_{y=y_c} = 0.$$

Se $0 < y_c \leq B/n_s$ risulta:

$$y_c = \left(\frac{8Q^2}{gn_s^2} \right)^{1/5}.$$

Se $y_c > B/n_s$ risulta:

$$y_c = \frac{B}{2n_s} + \left(\frac{Q^2}{gB^2} \right)^{1/3}.$$

Con questa procedura, è necessario verificare che l'altezza critica calcolata sia effettivamente contenuta nell'intervallo di validità della formula adottata.

È anche possibile calcolare la portata critica corrispondente ad un tirante idrico imposto. In tal caso, risulta:

$$Q_c = \sqrt{\frac{g\Omega^3}{b}}$$

esprimendo Ω con la relazione appropriata al valore numerico del tirante idrico imposto.

Nella Tabella 9.5 si riportano i valori calcolati per $C_u = 0$ e $C_{pu} = 0$.

Tabella 9.5. Grandezze caratteristiche della corrente per tirante idrico crescente

y_0 (m)	y_c (m)	Q (m ³ /s)	Ω (m ²)	P (m)	R (m)	k (m ^{1/3} /s)	U (m/s)
0.50	0.38	0.42	0.50	2.56	0.20	35.00	0.83
1.00	0.81	2.64	2.00	5.12	0.39	35.00	1.32
1.50	1.25	7.80	4.50	7.68	0.59	35.00	1.73
2.00	1.70	16.79	8.00	10.25	0.78	35.00	2.10
2.50	2.15	31.01	12.00	11.25	1.07	35.00	2.58
3.00	2.52	47.32	16.00	12.25	1.31	35.00	2.96
3.50	2.89	65.14	20.00	13.25	1.51	35.00	3.26
4.00	3.24	84.10	24.00	14.25	1.68	35.00	3.50

Le scale di deflusso e della portata critica sono diagrammate in Figura 9.26.

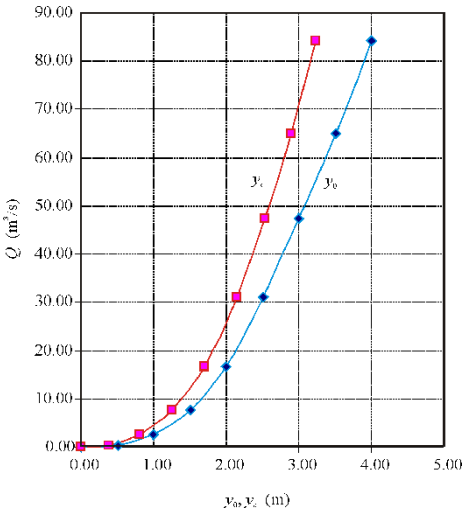


Figura 9.26. Scala di deflusso e della portata critica

Esercizio 9.14

Il canale in Figura 9.27 ha una larghezza di base $b = 6$ m e una pendenza del fondo pari a $i_f = (0.5 + C_{pu}/10)\%$. Le sponde sono in calcestruzzo con coefficiente di Gauckler-Strickler pari a $k_s = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Il fondo è in ghiaia con coefficiente di Gauckler-Strickler pari a $k_b = 45 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$.

- Si tracci, per punti, la scala delle portate di moto uniforme fino a un tirante $y_0 = 3$ m.

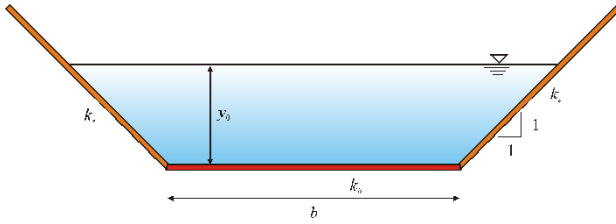


Figura 9.27. Sezione del canale

Soluzione

Imponendo che la resistenza complessiva offerta dalla corrente sia data dalla somma dei contributi dovuti alle diverse parti del contorno, risulta una scabrezza equivalente pari a (Citrini-Nosedà):

$$k_{seq} = \sqrt{\frac{P}{\sum \frac{P_i}{k_{si}^2}}}$$

Nel caso in esame, risulta:

$$k_{seq} = \left(\frac{b + 2\sqrt{2}y_0}{\frac{2\sqrt{2}y_0}{k_s^2} + \frac{b}{k_b^2}} \right)^{1/2}.$$

Per l'applicazione della formula precedente, non è necessario fare alcuna ipotesi sulla suddivisione della sezione.

Assumendo, invece, che la velocità media sia la stessa in ogni parte in cui è divisibile la sezione (Marchi-Rubatta), risulta:

$$\frac{U}{\sqrt{i_f}} = k_{seq} \left(\frac{\Omega}{P} \right)^{2/3} \equiv k_{si} \left(\frac{\Omega_i}{P_i} \right)^{2/3}$$

con $\Omega = \sum \Omega_i$ e $P = \sum P_i$.

Sostituendo, si calcola la scabrezza equivalente di Gauckler-Strickler:

$$k'_{seq} = \left(\frac{P}{\sum \frac{P_i}{k_{si}^{3/2}}} \right)^{2/3}.$$

Nel caso in esame, risulta:

$$k'_{seq} = \left(\frac{b + 2\sqrt{2}y_0}{\frac{2\sqrt{2}y_0}{k_s^{3/2}} + \frac{b}{k_b^{3/2}}} \right)^{2/3}.$$

Anche per l'applicazione della formula precedente non è necessario fare alcuna ipotesi sulla suddivisione della sezione.

La portata si ottiene dalla legge di resistenza di Chezy:

$$Q = k_{seq} R^{1/6} \Omega \sqrt{Ri_f} = \left(\frac{b + 2\sqrt{2}y_0}{\frac{2\sqrt{2}y_0}{k_s^2} + \frac{b}{k_b^2}} \right)^{1/2} \frac{(by_0 + y_0^2)^{5/3}}{(b + 2\sqrt{2}y_0)^{2/3}} \sqrt{i_f}$$

ovvero, usando la seconda espressione per la scabrezza equivalente:

$$Q = k'_{seq} R^{1/6} \Omega \sqrt{Ri_f} = \left(\frac{b + 2\sqrt{2}y_0}{\frac{2\sqrt{2}y_0}{k_s^{3/2}} + \frac{b}{k_b^{3/2}}} \right)^{2/3} \frac{(by_0 + y_0^2)^{5/3}}{(b + 2\sqrt{2}y_0)^{2/3}} \sqrt{i_f}.$$

La scala delle portate si traccia per punti. Ad esempio, assegnato $C_{pu} = 0$, applicando le due formule si calcolano le portate in Tabella 9.6.

I risultati ottenuti applicando le due formule, diagrammati in Figura 9.28, sono praticamente coincidenti.

Tabella 9.6. Scala di deflusso calcolata sulla base di due differenti definizioni della scabrezza equivalente

Citrini-Nosedà			Marchi-Rubatta		
y_0 (m)	Q (m ³ /s)	Q (m ³ /s)	y_0 (m)	Q (m ³ /s)	Q (m ³ /s)
0	0.00	0.00	2.0	70.85	71.20
0.5	6.23	6.25	2.5	107.00	107.55
1.0	20.58	20.66	3.0	150.89	151.67
1.5	42.11	42.31	3.5	202.84	203.88

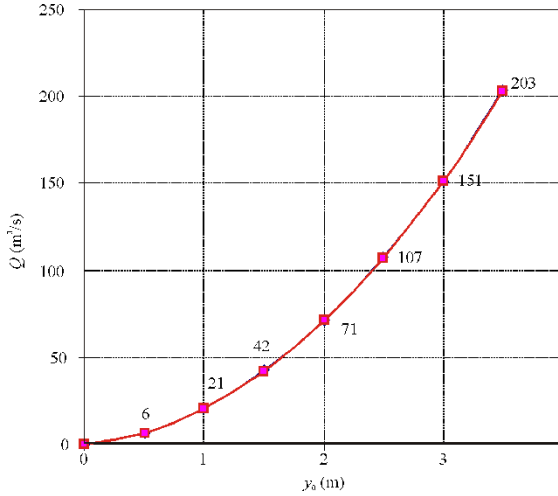


Figura 9.28. Scala di deflusso

Esercizio 9.15

Nel canale in Figura 9.29 il tronco di monte è dolcemente raccordato al tronco di valle con un allargamento della sezione. La scabrezza del canale è $k_{s1} = k_{s3} = 50 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, la scabrezza del raccordo è $k_{s2} = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. La lunghezza del raccordo è pari a $L = 50 \text{ m}$, il tronco di monte è largo $b = 1.5 \text{ m}$ e il tronco di valle è largo $B = 2 \text{ m}$. La portata è $Q = (3.2 + 0.1 \times C_{pu}) \text{ m}^3/\text{s}$.

- a) La pendenza del fondo di monte è pari a $i_{f1} = 0.1 \%$, mentre la pendenza del fondo di valle e del raccordo è $i_{f2} = i_{f3} = (0.3 + 0.01 \times C_u) \%$.
 - Tracciare *quantitativamente* il profilo del pelo libero, la profondità normale e la profondità critica. Assumere un intervallo di integrazione spaziale pari a 10 m .
- b) La pendenza del fondo di monte è pari a $i_{f1} = 2 \%$, mentre la pendenza del fondo di valle e del raccordo è $i_{f2} = i_{f3} = (0.3 + 0.01 \times C_u) \%$.
 - Tracciare *qualitativamente* il profilo del pelo libero, descrivendo gli aspetti critici di un eventuale tracciamento quantitativo.

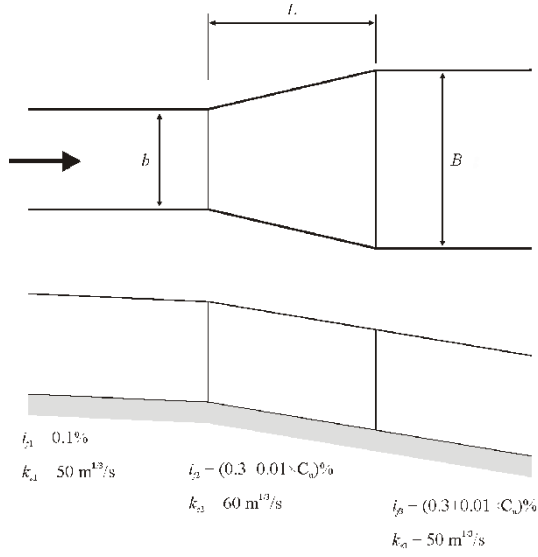


Figura 9.29. Geometria del canale. Caso a)

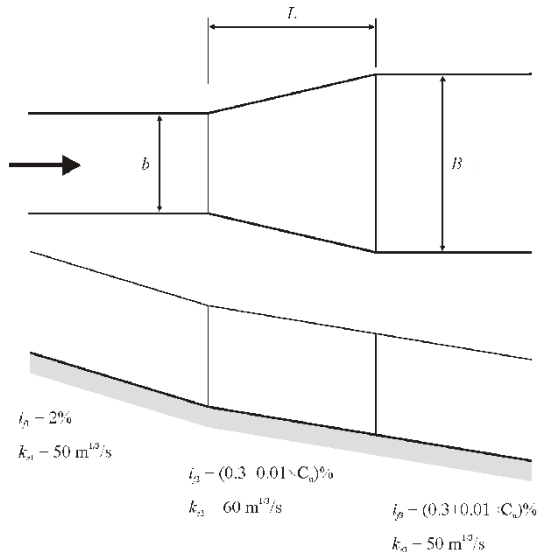


Figura 9.30. Geometria del canale. Caso b)

Soluzione

N.B. I risultati numerici si riferiscono al caso in cui $C_u = C_{pu} = 0$.

Caso a)

Calcoliamo l'altezza di moto uniforme di monte e di valle e le altezze critiche.

Per il tronco di monte risulta:

$$Q = k_{s1} R_1^{2/3} b y_{01} \sqrt{i_{f1}} = k_{s1} \frac{(b y_{01})^{5/3}}{(b + 2 y_{01})^{2/3}} \sqrt{i_{f1}}.$$

Risolvendo, si ottiene $y_{01} = 2.02$ m. L'energia a monte è pari a:

$$E_1 = y_{01} + \frac{Q^2}{2g (b y_{01})^2} = 2.02 + \frac{3.2^2}{2 \times 9.806 \times (1.5 \times 2.02)^2} = 2.07 \text{ m.}$$

L'altezza critica a monte è pari a:

$$y_{c1} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}} = 0.77 \text{ m.}$$

La corrente di moto uniforme è lenta.

Per il tronco di valle risulta:

$$Q = k_{s3} R_3^{2/3} B y_{03} \sqrt{i_{f3}} = k_{s3} \frac{(B y_{03})^{5/3}}{(B + 2 y_{03})^{2/3}} \sqrt{i_{f3}}.$$

Risolvendo, si ottiene $y_{03} = 0.95$ m. L'energia a valle è pari a:

$$E_3 = y_{03} + \frac{Q^2}{2g (B y_{03})^2} = 0.95 + \frac{3.2^2}{2 \times 9.806 \times (2 \times 0.95)^2} = 1.09 \text{ m.}$$

L'altezza critica a valle è pari a:

$$y_{c3} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} = 0.64 \text{ m.}$$

La corrente di moto uniforme è lenta.

La variazione di energia tra la sezione B-B e la sezione A-A (Figura 9.31) è pari a $E_1 - E_3 = 2.07 - 1.09 = 0.98$ m. La corrente deve ridurre l'energia specifica rispetto al fondo dell'alveo.

La condizione di moto uniforme per corrente lenta si raggiunge solo asintoticamente verso monte: verso valle il profilo deve raccordarsi con l'altezza di moto uniforme direttamente nella sezione B-B, non esistendo altri profili energeticamente compatibili con le caratteristiche del moto. Inoltre, ogni variazione del profilo può aversi solo verso monte a partire da tale sezione.

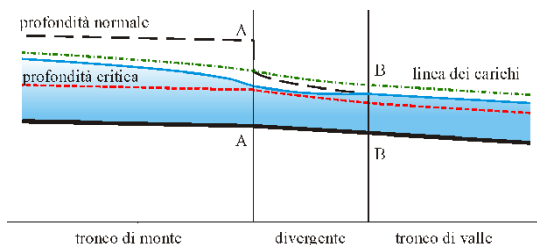


Figura 9.31. Grandezze caratteristiche della corrente nel canale

Il profilo può essere tracciato per punti sulla base dell'equazione di bilancio dell'energia specifica rispetto al fondo:

$$\frac{dE}{ds} = i_f - J.$$

A rigore, il processo di espansione provoca una perdita di carico addizionale, tradizionalmente assunta proporzionale all'altezza cinetica. Ai fini del calcolo, tale perdita potrebbe essere concentrata all'imbocco del divergente, oppure ripartita uniformemente lungo tutto il divergente.

Dividiamo il raccordo in 5 tronchi di lunghezza $\Delta s = 10$ m. La variazione di energia tra due sezioni di un tronco è pari a:

$$\Delta E = (i_f - J_{med}) \Delta s.$$

Nell'integrazione, assumiamo che le caratteristiche medie del tronco coincidano con le caratteristiche della sezione di estremità di monte del tronco medesimo. L'andamento del profilo è riportato in Figura 9.31.

La profondità normale (per definizione, è l'altezza di moto uniforme per un canale cilindrico a pendenza uniforme avente caratteristiche geometriche e di scabrezza pari a quelle della sezione di calcolo) si calcola, nel divergente, per valori discreti in un certo numero di sezioni. L'altezza critica è calcolabile analiticamente in forma esplicita e ha la seguente espressione:

$$y_c(s) = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g(b + ns)^2}} \quad \text{per } 0 < s < L$$

$$\text{con } n = \frac{B - b}{L}.$$

Nel tronco di monte, il profilo è di corrente lenta accelerata. L'altezza nella sezione di intersezione tra il divergente e il tronco di monte (sezione A-A), non può essere inferiore all'altezza critica (se così non fosse, nel tronco di monte si realizzerebbe un tratto di profilo di corrente veloce influenzata da valle; tale influenza è fisicamente incompatibile con le caratteristiche cinematiche di una corrente veloce).

Nel tronco di valle, il profilo è immediatamente di moto uniforme a partire dalla sezione di intersezione con il divergente (B-B), poiché non esiste profilo di raccordo al moto uniforme per corrente lenta asintoticamente verso valle. L'integrazione

spaziale *procede da valle verso monte*, a partire dalla sezione di intersezione tra il divergente e il tronco di valle (sezione B-B), dove la profondità deve essere pari all'altezza di moto uniforme nel tronco di valle. *Il profilo di moto permanente nel divergente non può essere tracciato schematicamente utilizzando i risultati validi per alveo cilindrico, poiché il divergente non è un alveo cilindrico. A rigore, sarebbe necessario discutere un'equazione del profilo nella quale compare un termine addizionale che dipende dalla variazione spaziale della sezione dell'alveo (eq.10.24 Citrini-Nosedà, p.391).*

Tale equazione, per il caso in esame, si sviluppa come segue.

L'energia specifica nel divergente è funzione dell'ascissa e dell'altezza della corrente:

$$E(s, y(s)) = y(s) + \frac{Q^2}{2g[b(s)]^2[y(s)]^2} \equiv y + \frac{Q^2}{2g(b + ns)^2 y^2}$$

$$\text{con } n = \frac{B - b}{L}.$$

(l'ipotesi di alveo cilindrico porterebbe, invece, ad una dipendenza del tipo $E = E(\chi, y(s))$)

Poiché risulta:

$$\frac{dH}{ds} = -J; H = E + z_f; \rightarrow \frac{dE}{ds} = i_f - J$$

con $\frac{dE}{ds} = \frac{\partial E}{\partial s} + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{dy}{ds}$, possiamo scrivere:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{i_f - J - \frac{\partial E}{\partial s}}{\frac{\partial E}{\partial y}} \rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{i_f - J + n \frac{Q^2}{g(b + ns)^3 y^2}}{1 - \frac{Q^2}{g(b + ns)^2 y^3}}.$$

Al numeratore il contributo addizionale seguente:

$$n \frac{Q^2}{g(b + ns)^3 y^2}$$

è sempre positivo per un divergente, ed equivale ad un incremento di pendenza del fondo. Il denominatore è classicamente maggiore o minore di zero per correnti lente o veloci.

In generale, assumendo che il coefficiente di Chezy $\chi = k_s R^{1/6}$ sia uniforme nel divergente (ipotesi lecita se la profondità della corrente è ivi limitatamente variabile), al variare della pendenza del fondo e della scabrezza sono possibili i nove profili riportati in Figura 9.32 (Nosedà, 1965).

I parametri hanno la seguente definizione:

$$\varepsilon = \frac{i_f \chi^2}{g}, \quad \eta = n \frac{\chi^2}{g}, \quad \varepsilon_1 = 1 + \frac{3}{2} \frac{\eta - 2}{2 - \sqrt{5\eta(\eta - 2)}}.$$

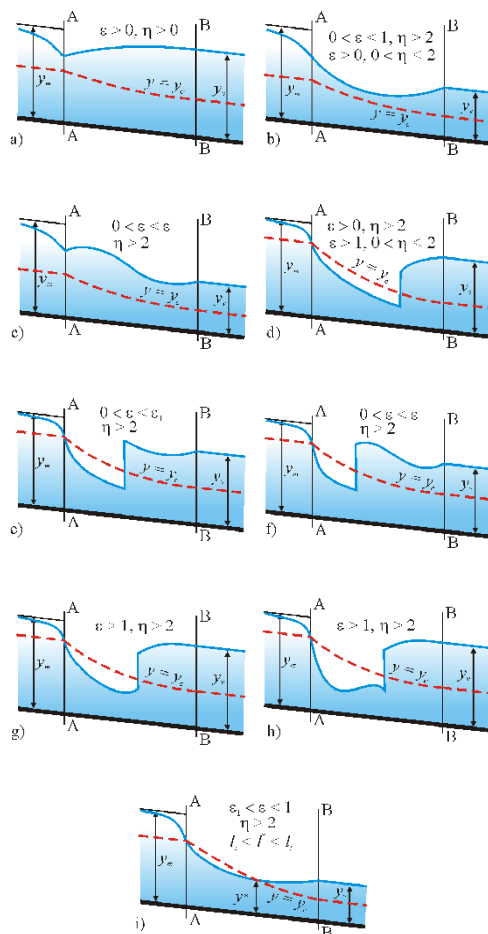


Figura 9.32. Canale divergente – Alveo a debole pendenza: possibili profili liquidi (modificata da G. Nosedà, *Profili di corrente nei canali rettangolari divergenti e convergenti. Atti del IX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Trieste, 1965*)

l^* è la larghezza della sezione nella quale la corrente assume l'altezza critica:

$$l^* = \left(\frac{Q}{\sqrt{g}} \right)^{2/5} \left(\frac{\varepsilon - 1}{2 - \eta} \right)^{3/5}.$$

l_i e l_t sono la larghezza iniziale e finale del divergente (rispettivamente pari a b e B nel caso in esame).

Nel caso in esame, assumendo una profondità media nel raccordo pari a 1.0 m, il raggio idraulico è mediamente pari a 0.46 m e risulta:

$$\varepsilon = 0.85 < 1, \quad \eta = 2.85 > 2, \quad \varepsilon_1 = 0.14, \quad l^* = 0.35 \text{ m}.$$

Pertanto, si possono verificare i profili a), b) e d), ma non il profilo i) poiché $l^* < l_i \equiv b$.

Si noti che, nel caso del profilo i), la transizione tra corrente veloce e corrente lenta avviene senza risalto idraulico. Questo profilo può realizzarsi solo per corrente in alveo non cilindrico (divergente).

Caso b)

Per il tronco di monte risulta:

$$Q = k_{s1} R_1^{2/3} b y_{01} \sqrt{i_{f1}} = k_{s1} \frac{(b y_{01})^{5/3}}{(b + 2 y_{01})^{2/3}} \sqrt{i_{f1}}.$$

Risolvendo numericamente per tentativi, si calcola $y_{01} = 0.62$ m. L'energia a monte è pari a:

$$E_1 = y_{01} + \frac{Q^2}{2g (b y_{01})^2} = 0.62 + \frac{3.2^2}{2 \times 9.806 (1.5 \times 0.62)^2} = 1.22 \text{ m.}$$

L'altezza critica a monte è pari a:

$$y_{c1} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}} = 0.77 \text{ m.}$$

La corrente è veloce, dato che $y_{01} < y_c$.

Per il tronco di valle risulta ancora $y_{03} = 0.95$ m. L'energia a valle è pari a $E_3 = 1.09$ m e l'altezza critica a valle è pari a:

$$y_{c3} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} = 0.64 \text{ m.}$$

La corrente è lenta.

La corrente idrica deve ridurre l'energia specifica rispetto al fondo ed è ipotizzabile un risalto idraulico, a meno che non sussistano le condizioni per un profilo di tipo i).

Nel divergente, il profilo deve raccordarsi immediatamente con l'altezza di moto uniforme a partire dalla sezione di intersezione tra il divergente e il tronco di valle (a meno che il risalto non sia spinto nel tronco di valle). L'altezza di moto uniforme nel tronco di monte si conserva fino all'intersezione con il divergente (a meno che non si formi un risalto nel tronco di monte).

Esercizio 9.16

Un canale di pendenza $i_f = 0.0025$, avente sezione rettangolare di larghezza $b = (3 + 0.1 \times C_u)$ m, è alimentato da un serbatoio di capacità che si ammette infinita. Il deflusso nel canale è regolato dalle paratoie P1 e P2 posizionate ad una distanza molto elevata (Figura 9.33). Nel canale, avente coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, transita una portata $Q = (20 + C_{pu}) \text{ m}^3/\text{s}$. Il tirante idrico nella sezione contratta a valle della paratoia P1 è pari a $C_c a = 0.70$ m mentre il tirante idrico a monte della paratoia P2 è pari a $y_{m2} = 3.50$ m.

- Determinare la quota di pelo libero y_{m1} del serbatoio che alimenta il canale.
- Determinare l'altezza di moto uniforme della corrente.
- Determinare il carattere dell'alveo relativamente alla portata transiente.
- Tracciare l'andamento qualitativo del profilo di moto permanente.
- Calcolare le altezze coniugate del risalto che si dovesse eventualmente sviluppare.

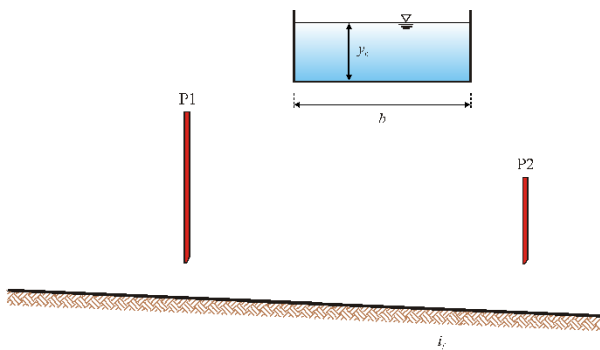


Figura 9.33. Canale con due paratoie di regolazione

Soluzione

Per la risoluzione del problema è necessario calcolare l'altezza di moto uniforme y_0 della corrente, informazione indispensabile per determinare il carattere dell'alveo in relazione alla portata Q transiente e per il tracciamento del profilo di moto permanente.

A tale scopo si scriva l'equazione di Chezy:

$$Q = k R^{1/6} \Omega \sqrt{R i_f}$$

dove:

$$\begin{aligned}\Omega &= by_0 \\ P &= b + 2y_0 \\ R &= \frac{\Omega}{P} = \frac{by_0}{b + 2y_0}.\end{aligned}$$

Quindi:

$$Q = k \left(\frac{by_0}{b + 2y_0} \right)^{2/3} by_0 \sqrt{i_f}.$$

Poiché non è possibile, nella relazione precedente, esplicitare l'incognita y_0 , il calcolo deve essere eseguito numericamente, ad esempio per tentativi.

Calcolata l'altezza di moto uniforme y_0 della corrente, si procede al confronto con l'altezza critica della corrente nell'alveo rettangolare, pari a:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}.$$

Nel caso proposto risulta sempre $y_c < y_0$ e l'alveo è a debole pendenza relativamente alla portata Q assegnata.

Il profilo qualitativo della corrente è riportato in Figura 9.34. Nell'ipotesi di efflusso libero, a breve distanza dalla paratoia P1 si stabilisce una sezione *contratta* (è una sezione con traiettorie rettilinee e parallele; ivi la corrente è quindi lineare con conseguente distribuzione idrostatica della pressione purché la corrente si appoggi al fondo del canale) e la corrente è *veloce* se $a < y_c$ (a rigore è sufficiente che $a < y_c/C_c$).

Per il calcolo di y_{m1} imponiamo il bilancio energetico tra la sezione a monte della paratoia e la sezione contratta, trascurando le dissipazioni nel processo di efflusso sotto battente:

$$y_{m1} + \frac{Q^2}{2gb^2 y_{m1}^2} = C_c a + \frac{Q^2}{2gb^2 (C_c a)^2}.$$

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_{m1} e può essere risolta analiticamente o numericamente per tentativi.

Il profilo della corrente a valle della paratoia, tra la sezione A e la sezione B è, nel caso in esame, un profilo di corrente *veloce ritardata* in un alveo a *debole pendenza*, e viene tracciato verso valle a partire dalla sezione contratta di tirante idrico $C_c a$. Tale profilo, qualora potesse svilupparsi completamente, raggiungerebbe con tangente verticale l'altezza critica y_c a una distanza finita dalla sezione contratta.

A monte della paratoia P2 la corrente è lenta se $y_{m2} > y_0$. Il profilo è di corrente *lenta ritardata*, tende asintoticamente verso monte all'altezza di moto uniforme e deve essere tracciato da valle verso monte a partire dal tirante idrico y_{m2} .

Tra le due paratoie deve avvenire la transizione tra la corrente veloce di monte (uscendo dalla paratoia P1) e la corrente lenta di valle (governata dalla presenza della paratoia P2).

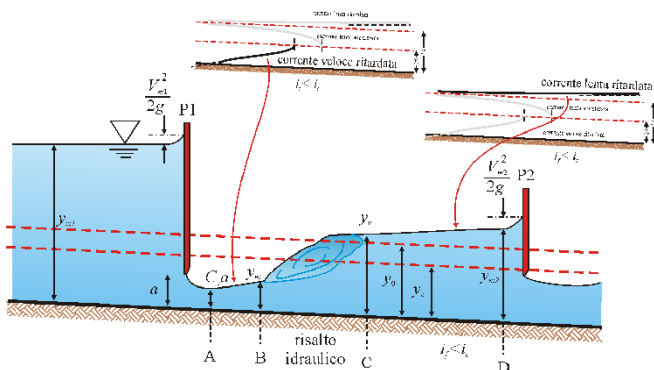


Figura 9.34. Profilo della corrente. Il sovrizzo subito a monte delle paratoie è pari all'altezza cinetica ed è dovuto all'arresto quasi completo della corrente, con conseguente trasformazione di energia cinetica in carico piezometrico

Se l'alveo è cilindrico a pendenza costante, la transizione avviene bruscamente con un risalto idraulico. Le altezze coniugate y_m e y_v del risalto soddisfano l'uguaglianza delle spinte totali:

$$\underbrace{\frac{\gamma b y_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_m}}_{S_m} = \underbrace{\frac{\gamma b y_v^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_v}}_{S_v}$$

Inoltre, data l'elevata distanza tra le due paratoie, si può ritenere con buona approssimazione che l'altezza coniugata del risalto y_v di corrente lenta sia praticamente coincidente con l'altezza di moto uniforme della corrente y_0 . Se così non fosse, la localizzazione del risalto potrebbe essere eseguita tracciando i diagrammi della spinta totale delle due correnti (a partire dalla sezione contratta verso valle per la corrente veloce, dalla paratoia P2 verso monte per la corrente lenta) e individuando l'intersezione.

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_m e può essere risolta analiticamente, numericamente per tentativi oppure mediante la divisione del polinomio di terzo grado in y_m per il binomio $(y_m - y_0)$, poiché l'altezza di moto uniforme y_0 è nota ed è una radice dell'equazione.

Dal punto di vista energetico la corrente, per attraversare sotto battente la paratoia P1, deve recuperare energia. Nel profilo tra le sezioni A e B e nel risalto dissipa parte dell'energia recuperata. Per ultimo, per attraversare la paratoia P2 deve recuperare nuovamente energia tra le sezioni C e D.

Come caso particolare può succedere che se le due paratoie sono relativamente vicine e se la luce libera a è sufficientemente piccola, la corrente veloce in uscita dalla paratoia P1 si insinui sotto la luce libera della paratoia P2 (Figura 9.35). In queste condizioni la presenza della seconda paratoia è irrilevante ai fini del tracciamento del profilo della corrente e il risalto idraulico si forma a valle della paratoia P2.

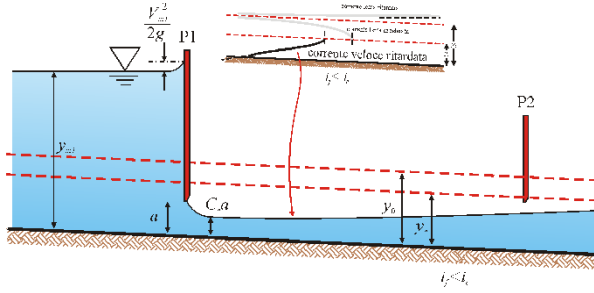


Figura 9.35. Profilo della corrente senza risalto tra le due paratoie

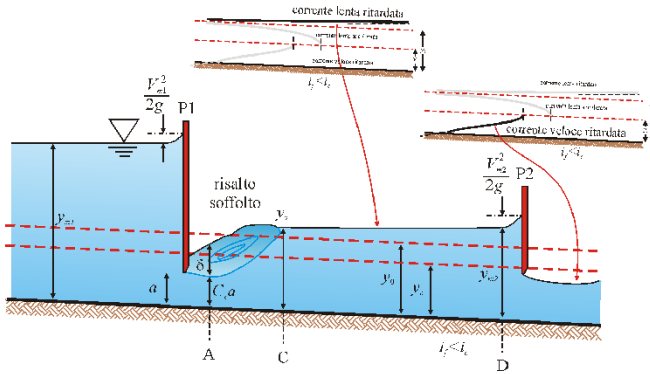


Figura 9.36. Profilo della corrente con risalto soffolto (o annegato)

Può anche succedere che il risalto venga spinto verso la paratoia P1 diventando un risalto soffolto (o annegato) (Figura 9.36).

In tal caso il calcolo può essere condotto tenendo conto che il vortice del risalto idraulico nella sezione contratta non contribuisce al flusso ma contribuisce col suo peso alla pressione. Il tirante idrico a monte della paratoia si calcola imponendo il seguente bilancio dell'energia:

$$y_{m1} + \frac{Q^2}{2gb^2y_{m1}^2} = C_c a + \delta + \frac{Q^2}{2gb^2(C_c a)^2}$$

(δ è lo spessore del vortice del risalto in corrispondenza della sezione contratta) mentre l'altezza $C_c a + \delta$ si calcola imponendo l'equilibrio delle spinte totali tra la sezione A e la sezione C:

$$\underbrace{\frac{\gamma b (C_c a + \delta)^2}{2}}_{S_m} + \underbrace{\frac{\rho Q^2}{b C_c a}}_{S_v} = \underbrace{\frac{\gamma b y_v^2}{2}}_{S_m} + \underbrace{\frac{\rho Q^2}{b y_v}}_{S_v}$$

La presenza del risalto soffolto implica la perdita della semimodularità, nella quale la portata in uscita dalla paratoia è funzione solo del livello idrico a monte. Quando

la paratoia non è più un semimodulo, la portata è funzione sia del livello a monte che del livello a valle.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$i_f = 0.0025, b = 3 \text{ m}, k = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}, C_c a = 0.70 \text{ m}, y_{m2} = 3.50 \text{ m}.$$

$$\begin{aligned} y_{m1} + \frac{Q^2}{2gb^2 y_{m1}^2} &= C_c a + \frac{Q^2}{2gb^2 (C_c a)^2} \rightarrow \\ y_{m1} + \frac{20^2}{2 \times 9.806 \times 3^2 \times y_{m1}^2} &= 0.70 + \frac{20^2}{2 \times 9.806 \times 3^2 \times 0.70^2} \rightarrow \\ y_{m1}^3 - 5.325 y_{m1}^2 + 2.266 &= 0. \end{aligned}$$

L'equazione ammette le tre soluzioni seguenti:

$$y_{m1} = -0.62 \text{ m}$$

$$y_{m1} = 0.70 \text{ m}$$

$$y_{m1} = 5.24 \text{ m}$$

delle quali la prima è fisicamente priva di significato e la seconda coincide con l'altezza nella sezione contratta. La terza soluzione è il valore di altezza cercato.

$$\begin{aligned} Q &= k \left(\frac{by_0}{b + 2y_0} \right)^{2/3} by_0 \sqrt{i_f} \rightarrow 20 = 70 \times \left(\frac{3 \times y_0}{3 + 2y_0} \right)^{2/3} \times 3y_0 \times \sqrt{0.0025} \rightarrow \\ y_0 &= 2.09 \text{ m} \\ y_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{20^2}{9.806 \times 3^2}} = 1.65 \text{ m}. \end{aligned}$$

Poiché $y_c < y_0$ l'alveo è a debole pendenza.

Per calcolare l'altezza coniugata di monte del risalto idraulico:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\gamma by_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_m}}_{S_m} &= \underbrace{\frac{\gamma by_v^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_v}}_{S_v} \rightarrow \\ \frac{9806 \times 3 \times y_m^2}{2} + \frac{1000 \times 20^2}{3 \times y_m} &= \frac{9806 \times 3 \times 2.09^2}{2} + \frac{1000 \times 20^2}{3 \times 2.09} \rightarrow \\ y_m^3 - 8.706 y_m + 9.065 &= 0 \end{aligned}$$

$$y_m = -3.38 \text{ m}$$

$$y_m = 1.29 \text{ m}$$

$$y_m = 2.09 \text{ m}$$

La soluzione cercata è la seconda.

Tra la sezione A e la sezione B il profilo aumenta il tirante idrico passando da 0.70 m a 1.29 m. Per le ipotesi fatte, nella sezione C subito a valle del risalto il tirante idrico assume valore pari all'altezza di moto uniforme $y_0 = 2.09$ m. Tra la sezione C e la sezione D il profilo aumenta ulteriormente il tirante fino a raggiungere il valore di 3.50 m.

Il profilo di moto permanente risultante è rappresentato qualitativamente in Figura 9.34.

Esercizio 9.17

Un canale avente scabrezza $k = (60 + 2 \times C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e pendenza del fondo $i_f = 0.02$ deriva acqua da un ampio bacino in quiete a mezzo di un imbocco ben raccordato per il quale le perdite sono trascurabili (Figura 9.37). La sezione del canale è triangolare con pendenza delle sponde pari ad $\alpha = 45^\circ$ come mostrato in Figura 9.37. Il livello nel bacino è alla quota $H = (4 + C_u/5)$ m sopra la soglia di imbocco.

- Determinare la portata defluente.
 - Stabilire se il canale è a debole o forte pendenza.
 - Tracciare qualitativamente il profilo di moto permanente.
- ◇ Si supponga il canale di lunghezza infinita.

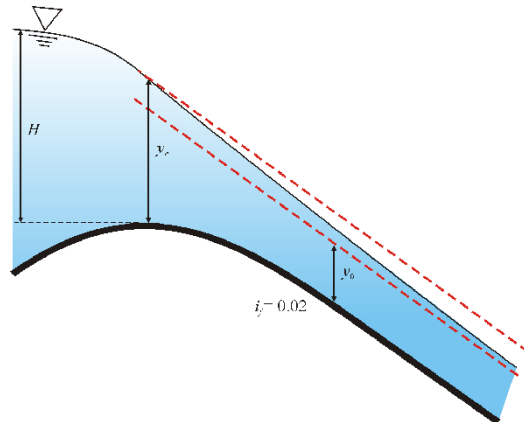


Figura 9.37. Canale di derivazione da un bacino

Soluzione

In primo luogo occorre determinare il valore della portata Q derivata dal bacino in quiete facendo opportune ipotesi. Dato l'elevato valore della pendenza del canale è ragionevole supporre che lo stesso sia a forte pendenza per la portata Q derivata, ancora da determinarsi.

Tale ipotesi implica che la corrente di moto uniforme sia una corrente veloce che tenderà a raggiungere l'altezza y_0 asintoticamente verso valle. In corrispondenza dell'incile si ha un passaggio spontaneo attraverso lo stato critico. Non si hanno, inoltre, dissipazioni energetiche poiché l'imbocco è ben raccordato.

Si possono pertanto mettere a sistema l'equazione di bilancio energetico e la condizione di stato critico:

$$\begin{cases} H = y_c + \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} \\ \frac{\Omega_c^3}{B_c} = \frac{Q^2}{g} \end{cases}$$

Per questa particolare geometria della sezione l'area bagnata e la larghezza del pelo libero in corrispondenza dello stato critico hanno la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \Omega_c &= y_c^2 \\ B_c &= 2y_c. \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\Omega_c^3}{B_c} = \frac{Q^2}{g} \rightarrow \frac{Q^2}{g\Omega_c^2} = \frac{y_c}{2} \\ H = y_c + \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} \rightarrow H = \frac{5y_c}{4} \end{cases}$$

È quindi possibile calcolare l'altezza critica y_c :

$$y_c = \frac{4H}{5}.$$

Sostituendo il valore ricavato è possibile determinare la portata Q :

$$Q = \sqrt{\frac{g\Omega_c^2 y_c}{2}} = \sqrt{\frac{gy_c^5}{2}}.$$

Individuato il valore della portata Q , è necessario calcolare l'altezza di moto uniforme y_0 della corrente per assicurarsi del carattere dell'alveo e per il tracciamento del profilo di moto permanente.

A tale scopo si utilizza l'equazione di Chezy:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f}$$

dove:

$$\Omega = y_0^2$$

$$P = 2\sqrt{2}y_0$$

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{y_0^2}{2\sqrt{2}y_0} = \frac{y_0}{2\sqrt{2}}.$$

Si ottiene, pertanto:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f} = k\left(\frac{y_0}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}y_0^2\sqrt{i_f} = \frac{k\sqrt{i_f}}{(2\sqrt{2})^{2/3}}y_0^{8/3}$$

dalla quale, invertendo, è possibile ricavare direttamente l'incognita y_0 altezza di moto uniforme della corrente:

$$y_0 = \frac{Q^{3/8}(2\sqrt{2})^{1/4}}{(k\sqrt{i_f})^{3/8}}.$$

Nel caso proposto sussiste sempre la relazione $y_0 < y_c$ che conferma l'ipotesi iniziale di alveo a forte pendenza relativamente alla portata Q derivata dal bacino.

Il profilo di moto permanente risultante è qualitativamente rappresentato in Figura 9.38.

A partire dallo stato critico, in corrispondenza dell'incile, si sviluppa un profilo di corrente veloce accelerata che tende asintoticamente verso valle all'altezza di

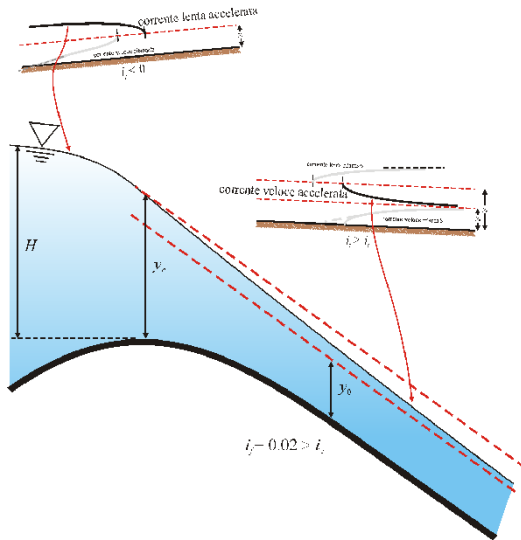


Figura 9.38. Profilo della corrente

moto uniforme y_0 . Nel bacino, a monte dell'incile, si sviluppa un profilo di richiamo di corrente lenta accelerata.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$k = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_f = 0.02, H = 4 \text{ m}.$$

Si calcola:

$$y_c = \frac{4H}{5} = \frac{4 \times 4}{5} = 3.2 \text{ m}$$

$$Q = \sqrt{\frac{gy_c^5}{2}} = \sqrt{\frac{9.806 \times 3.2^5}{2}} = 40.56 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$y_0 = \frac{Q^{3/8} (2\sqrt{2})^{1/4}}{(k\sqrt{i_f})^{3/8}} = \frac{40.56^{3/8} \times (2 \times \sqrt{2})^{1/4}}{(60 \times \sqrt{0.02})^{3/8}} = 2.33 \text{ m}.$$

Per le caratteristiche geometriche e di scabrezza del canale e per l'altezza H , si calcola una pendenza critica i_c pari a:

$$i_c = \frac{2g}{k^2 y_c^{1/3}} = \frac{2 \times 9.806}{60^2 \times 3.2^{1/3}} = 0.0037.$$

Se $i_f > i_c$ la portata derivabile è indipendente dalla pendenza del canale ed assume il massimo valore. Invece, se $i_f < i_c$ il canale è a debole pendenza e la condizione di moto uniforme si raggiunge immediatamente a valle della presa. In tal caso la portata derivata è funzione della pendenza del canale e si riduce per pendenze decrescenti.

Esercizio 9.18

Un canale rettangolare di larghezza $b = 8 \text{ m}$ è suddiviso in due tratti aventi pendenza del fondo $i_{f1} = 0.01$ e $i_{f2} = 0.002$ con scabrezze rispettivamente pari a $k_1 = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ e $k_2 = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ (Figura 9.39).

Nel canale defluisce una portata d'acqua $Q = (80 + 5 \times C_u) \text{ m}^3/\text{s}$. Determinare:

- l'andamento qualitativo del profilo di moto permanente della corrente;
- i valori delle altezze coniugate qualora sia presente un risalto idraulico.

Soluzione

Come prima cosa occorre stabilire il carattere dei due tronchi d'alveo, aventi pendenza e scabrezza rispettivamente i_{f1} , k_1 e i_{f2} , k_2 , relativamente alla portata Q

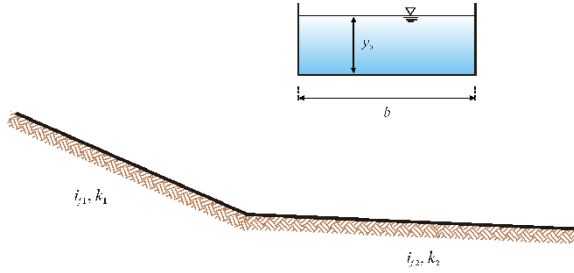


Figura 9.39. Canale con variazione di pendenza

transitante. È necessario calcolare il valore dell'altezza critica y_c , unico per i due tratti (essendo funzione delle grandezze Q , g e b che non variano nei due tronchi), e le altezze di moto uniforme y_{01} e y_{02} della corrente attraverso le relazioni seguenti:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

$$Q = k_1 R_1^{1/6} \Omega_1 \sqrt{R_1 i_{f1}}$$

$$Q = k_2 R_2^{1/6} \Omega_2 \sqrt{R_2 i_{f2}}$$

dove:

$$\Omega_1 = by_{01}, R_1 = \frac{\Omega_1}{P_1} = \frac{by_{01}}{b + 2y_{01}}$$

$$\Omega_2 = by_{02}, R_2 = \frac{\Omega_2}{P_2} = \frac{by_{02}}{b + 2y_{02}}.$$

Poiché per una sezione rettangolare non è possibile esplicitare analiticamente l'incognita y_0 , il calcolo deve essere eseguito numericamente per tentativi.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$b = 8 \text{ m}, i_{f1} = 0.01, i_{f2} = 0.002, k_1 = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, k_2 = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, Q = 80 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Si calcola $y_{01} = 1.39 \text{ m}$ e $y_{02} = 2.71 \text{ m}$, $y_c = 2.17 \text{ m}$.

Nel caso proposto sussiste la relazione $y_{01} < y_c < y_{02}$ e pertanto i tronchi di monte e di valle risultano, rispettivamente, a forte e debole pendenza per la portata Q assegnata.

La successione *alveo a forte pendenza* – *alveo a debole pendenza*, se l'alveo è cilindrico prismatico, richiede la formazione di un risalto idraulico. La collocazione spaziale dello stesso deve essere determinata attraverso il confronto delle spinte totali relative alle correnti di altezza y_{01} e y_{02} .

Nel caso proposto sussiste la relazione:

$$S_{01} \equiv \frac{\gamma by_{01}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_{01}} > S_{02} \equiv \frac{\gamma by_{02}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_{02}}.$$

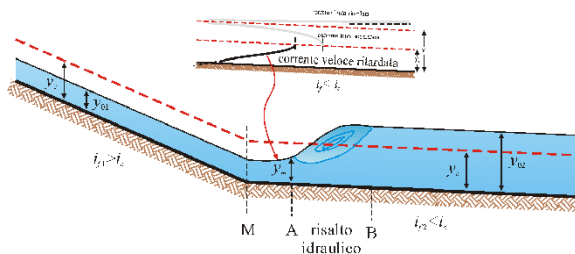


Figura 9.40. Profilo della corrente se il risalto è spinto verso valle

Infatti, risulta:

$$S_{01} \equiv \frac{\gamma b y_{01}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_{01}} = \frac{9806 \times 8 \times 1.39^2}{2} + \frac{1000 \times 80^2}{8 \times 1.39} = 651.3 \text{ kN}$$

$$S_{02} \equiv \frac{\gamma b y_{02}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_{02}} = \frac{9806 \times 8 \times 2.71^2}{2} + \frac{1000 \times 80^2}{8 \times 2.71} = 583.3 \text{ kN}.$$

Questa condizione impone la collocazione del risalto idraulico a valle del cambio di pendenza.

Difatti se il risalto si sviluppasse nel tronco a forte pendenza, l'unico profilo possibile a partire dall'altezza coniugata di valle del risalto sarebbe di corrente lenta ritardata. La corrente lenta ritardata incrementa la spinta nel verso del moto e, dunque, la spinta non potrebbe mai ridursi per assumere il valore $S_{02} < S_{01}$ corrispondente al moto uniforme nel tronco di valle.

L'andamento qualitativo del profilo di moto permanente che si instaura nell'alveo in esame è riportato in Figura 9.40.

La corrente di moto uniforme nel tronco a monte ha un'energia specifica rispetto al fondo maggiore di quella che compete alla corrente di moto uniforme nel tronco di valle. A partire dal punto M si sviluppa l'unico profilo di corrente veloce possibile in un alveo a debole pendenza. Tale profilo è a dissipazione di energia specifica rispetto al fondo (la corrente dissipa più energia di quella fornita dalla gravità) e si interrompe in corrispondenza di un tirante idrico y_m , altezza coniugata dell'altezza di moto uniforme y_{02} della corrente.

La determinazione di y_m avviene imponendo l'uguaglianza delle spinte totali a valle e a monte del risalto, in corrispondenza dei tiranti idrici y_{02} e y_m :

$$\underbrace{\frac{\gamma b y_{02}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_{02}}}_{S_{y_{02}}} = \underbrace{\frac{\gamma b y_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_m}}_{S_{y_m}}.$$

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_m e può essere risolta per via analitica o, preferibilmente, per via numerica per tentativi. È anche possibile ridurre il grado del polinomio di terzo grado in y_m dividendolo per il binomio $(y_m - y_{02})$, poiché l'altezza di moto uniforme y_{02} è nota ed è una radice dell'equazione.

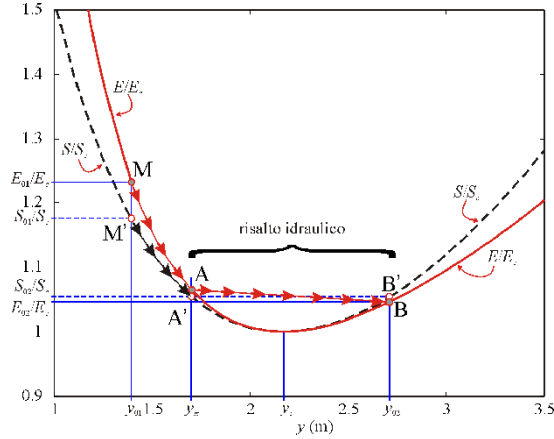


Figura 9.41. Evoluzione della spinta e dell'energia della corrente

Nel caso in esame risulta $y_m = 1.70$ m. L'evoluzione della spinta e dell'energia (adimensionali rispetto ai valori assunti in condizioni critiche) è riportata in Figura 9.41. La curva continua rappresenta l'energia specifica adimensionale rispetto all'energia in condizioni critiche, per la portata assegnata Q ; la curva tratteggiata rappresenta la spinta adimensionale rispetto alla spinta in condizioni critiche per la portata assegnata Q .

A partire dal cambiamento di pendenza (sezione M), lungo il profilo di corrente veloce ritardata la spinta si riduce fino a giungere al valore di spinta che compete a y_m (sezione A), altezza coniugata di y_{02} . Dal punto di vista energetico anche l'energia specifica si riduce fino al valore che compete a y_m . Il risalto idraulico tra le altezze coniugate dissipa ulteriore energia, pari a:

$$\Delta E = \frac{(y_m - y_{02})^3}{4y_my_{02}}.$$

Tale dissipazione avviene, per i fluidi reali, grazie alla formazione di vortici sempre più piccoli fino alla scala geometrica controllata dalla viscosità e si manifesta con la trasformazione di energia meccanica in energia termica.

È questione di non poco conto come la dissipazione nel risalto possa essere prevista in uno schema di calcolo valido per i fluidi ideali (la viscosità del fluido, infatti, non compare nell'equazione di conservazione della massa e di bilancio della quantità di moto lineare, utilizzate per descrivere il risalto). Un'interpretazione ormai condivisa, originariamente dovuta a Rayleigh (Rayleigh, Lord, 1910. *Aerial plane waves of finite amplitude. Proc. R. Soc. Lond.* A84, 247–284) attribuisce tale incongruenza alla inadeguatezza delle equazioni differenziali adottate in presenza di una discontinuità. Per loro natura le equazioni matematiche utilizzate non sarebbero, quindi, adatte a descrivere il comportamento di funzioni (quali la velocità, la pressione, ecc.) che, nel risalto, sono localmente prive di derivata. Un modello coerente, in grado di spiegare la variazione di energia anche per fluidi

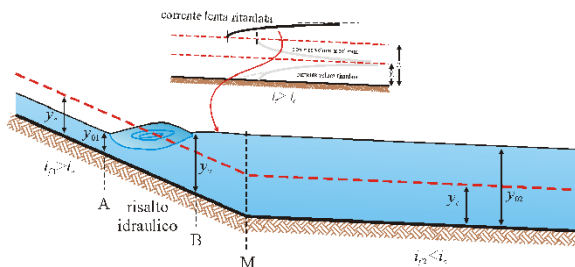


Figura 9.42. Profilo della corrente se il risalto si forma nel canale a forte pendenza

ideali (descrivibili con le equazioni di Eulero), postula che la sottrazione di energia nel risalto sia il trasferimento di energia meccanica dalla corrente idrica a vortici di scala geometrica virtualmente nulla, convenzionalmente descrivibili come ‘calore’ o ‘energia interna’ (Broadwell, J.E., 1997. Shocks and energy dissipation in inviscid fluids: a question proposed by Lord Rayleigh. *JFM* 347, 375–380).

Se risultasse $S_{01} < S_{02}$ il risalto dovrebbe formarsi nel tronco a forte pendenza (Figura 9.42). Difatti, se avvenisse nel tronco a debole pendenza l'altezza coniugata di valle sarebbe necessariamente pari a y_{02} e l'altezza coniugata di monte si raccorderebbe con y_{01} , a partire dalla sezione M, con un profilo di corrente veloce ritardata. Tale profilo riduce la spinta nel verso del moto e non potrebbe mai raggiungere il valore S_{02} .

Infine, nel caso in cui risultasse $S_{01} = S_{02}$ il risalto si formerebbe esattamente nella sezione M, con le altezze coniugate pari, rispettivamente, a y_{01} e y_{02} .

Esercizio 9.19

In un canale a sezione rettangolare di larghezza $b = (15 + C_u)$ m, pendenza del fondo $i_f = 0.01$ e coefficiente di scabrezza di Gauckler-Strickler $k = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ (Figura 9.43) defluisce una portata $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$.

In una sezione intermedia è presente una paratoia che lascia aperta sul fondo una luce rettangolare di altezza $a = (0.9 + C_{pu}/20)$ m.

- Determinare il tirante idrico a monte della paratoia.
- Determinare l'andamento qualitativo del profilo di moto permanente.
- Qualora sia presente un risalto idraulico, determinare il valore delle altezze coniugate.

◇ L'efflusso avviene senza dissipazioni e il coefficiente di contrazione è pari a $C_c = 0.61$. Si consideri il canale di lunghezza infinita.

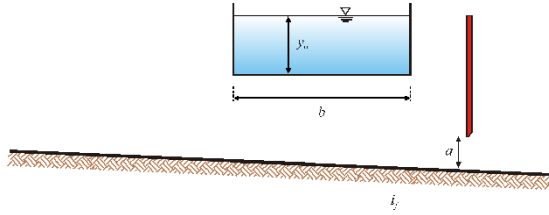


Figura 9.43. Schema del canale con paratoia piana di regolazione

Soluzione

Come prima cosa occorre stabilire se l'alveo è a forte o debole pendenza relativamente alla portata Q . È necessario calcolare l'altezza critica y_c e l'altezza di moto uniforme y_0 della corrente attraverso le relazioni:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$$

e

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f}$$

dove:

$$\Omega = by_0, R = \frac{\Omega}{P} = \frac{by_0}{b + 2y_0}.$$

Poiché per una sezione rettangolare non è possibile esplicitare analiticamente l'incognita y_0 , il calcolo deve essere eseguito numericamente per tentativi.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$b = 15 \text{ m}, i_f = 0.01, k = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}, a = 0.9 \text{ m}.$$

Si calcola $y_0 = 1.02 \text{ m}$ e $y_c = 1.65 \text{ m}$.

Nel caso proposto sussiste la relazione $y_0 < y_c$ e, pertanto, l'alveo risulta a forte pendenza relativamente alla portata Q .

L'andamento qualitativo del profilo di moto permanente che si instaura nell'alveo in esame è presentato in Figura 9.44.

A monte della paratoia

A monte della paratoia se la luce libera a è minore dell'altezza di moto uniforme y_0 , la corrente deve recuperare energia specifica rispetto al fondo per permettere il passaggio sotto battente. Tale recupero di energia non può che avvenire in corrente lenta, poiché la causa di disturbo (la paratoia) non potrebbe far risentire i suoi effetti verso monte in presenza di una corrente veloce.

La determinazione di y_{m1} avviene attraverso un bilancio energetico tra la sezione a monte della paratoia e la sezione contratta, in assenza di perdite nel processo

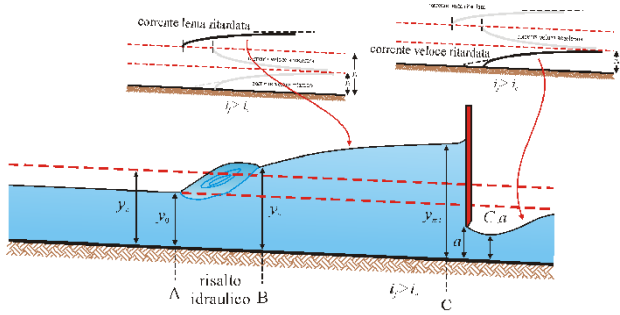


Figura 9.44. Profilo della corrente

di efflusso sotto battente:

$$y_{m1} + \frac{Q^2}{2gb^2 y_{m1}^2} = C_c a + \frac{Q^2}{2gb^2 (C_c a)^2}.$$

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_{m1} e deve essere risolta analiticamente numericamente per tentativi relativamente a tiranti idrici maggiori di y_c . Nel caso in esame risulta $y_{m1} = 8.03$ m.

Il profilo che si instaura è di corrente lenta ritardata in alveo a forte pendenza, che a partire dalla condizione critica tende all'asintoto orizzontale verso valle. Il passaggio da corrente veloce di moto uniforme a corrente lenta ritardata a monte della paratoia avviene con un risalto idraulico. Tale risalto si sviluppa tra l'altezza di moto uniforme y_0 e l'altezza coniugata y_v .

La determinazione di y_v avviene imponendo il bilancio delle spinte totali a monte e a valle del risalto:

$$\underbrace{\frac{\gamma b y_0^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_0}}_{S_{y_0}} = \underbrace{\frac{\gamma b y_v^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_v}}_{S_{y_v}}.$$

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_v e può essere risolta analiticamente o, preferibilmente, numericamente per tentativi, oppure mediante la divisione del polinomio di terzo grado in y_v per il binomio $(y_v - y_0)$ essendo nota l'altezza di moto uniforme y_0 anch'essa radice dell'equazione. Nel caso in esame risulta $y_v = 2.51$ m.

A valle della paratoia

La corrente che fuoriesce dalla luce sotto la paratoia è una corrente veloce. A partire dalla sezione contratta (di tirante idrico $C_c a$) il profilo è di corrente veloce ritardata e tende all'altezza di moto uniforme y_0 asintoticamente verso valle.

Esercizio 9.20

Un canale avente scabrezza $k = (60 + 2 \times C_{pu}) \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ deriva acqua da un ampio bacino in quiete a mezzo di un imbocco ben raccordato per il quale le perdite sono trascurabili. Il canale ha pendenza del fondo $i_{f1} = 0.02$ in un primo tratto e $i_{f2} = 0.001$ in un secondo tratto. Il cambio di pendenza si trova ad una distanza molto elevata dall'incile e il tratto a pendenza i_{f2} mantiene inalterate le proprie caratteristiche indefinitamente verso valle. La sezione del corso d'acqua è triangolare con pendenza delle sponde pari ad $\alpha = 60^\circ$ come mostrato in Figura 9.45. Il livello nel bacino è alla quota $H = (4 + C_u/5) \text{ m}$ sopra la soglia di imbocco.

- Determinare la portata defluente nel canale.
 - Tracciare in via qualitativa il profilo di moto permanente.
 - Tracciare quantitativamente il profilo a partire dalla sezione del cambio di pendenza.
- ◇ Si assuma un numero di passi per l'integrazione spaziale $n = 10$.

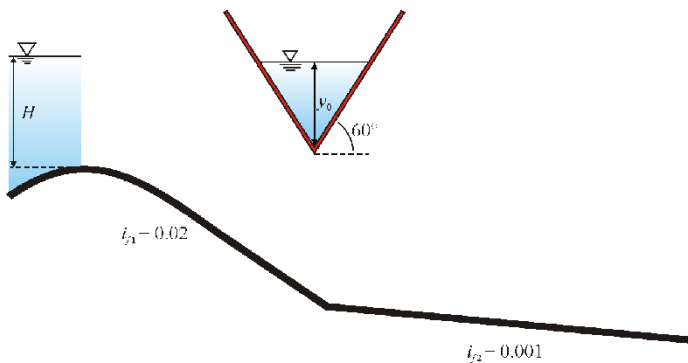


Figura 9.45. Canale di presa con variazione di pendenza

Soluzione

In primo luogo occorre determinare il valore della portata Q derivata dal bacino con alcune ipotesi semplificative. Dato l'elevato valore della pendenza del canale nel primo tronco è ragionevole ritenere che lo stesso sia a forte pendenza per la portata Q derivata dal bacino. Ciò implica un passaggio spontaneo della corrente attraverso lo stato critico in corrispondenza della sezione dell'incile. Possiamo inoltre trascurare le dissipazioni all'imbocco poiché l'imbocco è ben raccordato.

Possiamo mettere a sistema l'equazione di bilancio energetico della corrente tra il bacino e la sezione all'incile e la condizione di stato critico:

$$\begin{cases} H \equiv H_c = y_c + \frac{Q^2}{2g\Omega_c^2} \\ \frac{\Omega_c^3}{B_c} = \frac{Q^2}{g} \end{cases}$$

e calcolare:

$$H = y_c + \frac{\Omega_c}{2B_c}.$$

Per la particolare geometria della sezione l'area bagnata e la larghezza del pelo libero in corrispondenza dello stato critico, relativamente al quale si ha il tirante idrico y_c , hanno rispettivamente espressione:

$$\begin{aligned} \Omega_c &= \frac{y_c^2}{\sqrt{3}} \\ B_c &= \frac{2y_c}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Sostituendo, si ottiene:

$$H = \frac{5y_c}{4}.$$

È quindi possibile calcolare il valore dell'altezza critica y_c noto il tirante idrico dell'acqua nel bacino rispetto alla sezione all'incile (tale tirante deve essere misurato a distanza sufficiente dall'incile, per non essere influenzato dal profilo di richiamo):

$$y_c = \frac{4H}{5}.$$

Sostituendo il valore ricavato è possibile determinare la portata Q :

$$Q = \sqrt{\frac{g\Omega_c^2 y_c}{2}} = \sqrt{\frac{gy_c^5}{6}}.$$

Individuato il valore della portata Q è necessario calcolare l'altezza di moto uniforme della corrente nei due tronchi.

A tale scopo si utilizza l'equazione di Chezy:

$$Q = kR^{1/6}\Omega\sqrt{Ri_f}$$

dove:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{y_0^2}{\sqrt{3}} \\ P &= \frac{4y_0}{\sqrt{3}} \\ R &= \frac{\Omega}{P} = \frac{y_0^2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{4y_0} = \frac{y_0}{4}. \end{aligned}$$

Si ottiene, pertanto:

$$Q = k \left(\frac{y_0}{4} \right)^{1/6} \frac{y_0^2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{y_0}{4}} i_f = \frac{k \sqrt{i_f} y_0^{8/3}}{4^{2/3} \sqrt{3}}$$

dalla quale, sostituendo il corrispondente valore della pendenza ed invertendo, è possibile ricavare direttamente le incognite y_{01} e y_{02} , altezze di moto uniforme della corrente rispettivamente per il tronco a pendenza i_{f1} e per quello a pendenza i_{f2} :

$$y_{01} = \left(\frac{4^{2/3} \sqrt{3} Q}{k \sqrt{i_{f1}}} \right)^{3/8}$$

$$y_{02} = \left(\frac{4^{2/3} \sqrt{3} Q}{k \sqrt{i_{f2}}} \right)^{3/8}.$$

Nel caso proposto sussiste sempre la relazione $y_{01} < y_c < y_{02}$: il primo tronco risulta a forte pendenza mentre il secondo risulta a debole pendenza.

In corrispondenza dell'incile si ha il passaggio spontaneo attraverso lo stato critico. Il profilo che si sviluppa nel primo tronco è un profilo di corrente veloce accelerata che tende a ricostituire il moto uniforme asintoticamente verso valle. Data l'elevata distanza presente tra l'incile e il cambio di pendenza, si può ritenere con buona approssimazione che l'altezza di moto uniforme y_{01} venga raggiunta prima del cambio di pendenza stesso.

L'assenza di cause perturbatrici all'estremo di valle del tronco a pendenza inferiore garantisce la condizione di moto uniforme del tronco a pendenza i_{f2} con tirante idrico costante e pari a y_{02} .

La successione *corrente veloce* – *corrente lenta* impone la formazione di un risalto idraulico la cui collocazione spaziale deve essere determinata attraverso il confronto delle spinte totali relative alle correnti di altezza y_m e y_v , essendo y_m e y_v le profondità che la corrente assumerebbe, rispettivamente, a monte e a valle del cambio di pendenza in assenza di ulteriori disturbi. Nel particolare caso in esame si può ritenere che l'altezza y_m sia praticamente coincidente con il valore y_{01} data l'elevata distanza tra la sezione dell'incile e quella del cambio di pendenza. L'altezza coniugata di valle y_v coincide con l'altezza di moto uniforme del secondo tronco y_{02} per le ragioni sopra esposte.

Occorre valutare le spinte totali:

$$S_m = \gamma z_{Gm} \Omega_m + \frac{\rho Q^2}{\Omega_m} \equiv S_{y_{01}} = \gamma \frac{y_{01}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \rho Q^2}{y_{01}^2}$$

$$S_v = \gamma z_{Gv} \Omega_v + \frac{\rho Q^2}{\Omega_v} \equiv S_{y_{02}} = \gamma \frac{y_{02}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \rho Q^2}{y_{02}^2}.$$

z_{Gm} e z_{Gv} sono gli affondamenti del baricentro delle sezioni trasversali della corrente rispetto al pelo libero. Nel caso proposto risulta $S_m < S_v$ per cui il risalto idraulico è collocato a monte del cambio di pendenza nel tronco a pendenza maggiore. Infatti la differenza di spinta può essere recuperata solo con un profilo di

corrente lenta ritardata a valle del risalto. Se il risalto si formasse nel tronco a debole pendenza di valle, si raccorderebbe direttamente con l'altezza di moto uniforme y_{02} , preceduto da un tronco di corrente veloce ritardata che riduce la spinta nel verso del moto.

Nel primo tronco, tra la sezione di valle del risalto e il cambio di pendenza si sviluppa un profilo di corrente lenta ritardata, unico profilo di corrente lenta possibile in un alveo a forte pendenza (profilo tra le sezioni M e B). Se tale profilo potesse svilupparsi interamente, raggiungerebbe verso monte lo stato critico con tangente verticale ad una distanza finita dal cambio di pendenza (a rigore, la forte curvatura delle traiettorie renderebbe non più valida l'ipotesi di distribuzione idrostatica della pressione, contenuta nelle equazioni adottate per descrivere il profilo di corrente permanente gradualmente variato). Data la presenza della corrente veloce di moto uniforme proveniente da monte, tale profilo (abbiamo supposto che il tronco di monte sia lungo a sufficienza da permettere alla corrente di raggiungere il moto uniforme) si interromperà in corrispondenza di un valore y_v (sezione A), altezza coniugata della corrente veloce di moto uniforme y_{01} . La formazione del risalto nel tronco di monte porta a $y_v \neq y_{02}$, da calcolarsi imponendo l'uguaglianza delle spinte:

$$\underbrace{\gamma \frac{y_{01}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_{01}^2}}_{S_m \equiv S_{y_{01}}} = \underbrace{\gamma \frac{y_v^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_v^2}}_{S_v}.$$

Il risalto ha una lunghezza finita esprimibile, sulla base di dati sperimentali (Tabella 9.7), in funzione dell'ampiezza (differenza tra le altezze coniugate) al variare del numero di Froude della corrente di monte:

$$\text{Fr}_m = \frac{V}{\sqrt{gy_{media}}}.$$

y_{media} è la profondità idraulica media, pari al rapporto tra l'area della sezione trasversale della corrente e la larghezza del pelo libero:

$$y_{media} = \frac{\Omega}{B}.$$

Il tracciamento qualitativo del profilo di moto permanente è riportato in Figura 9.46.

Tabella 9.7. Lunghezza sperimentale del risalto idraulico

Fr_m	$L/(y_v - y_m)$
2	7.6
3	7.2
5	7.0
10	6.6
15	6.2
20	5.7

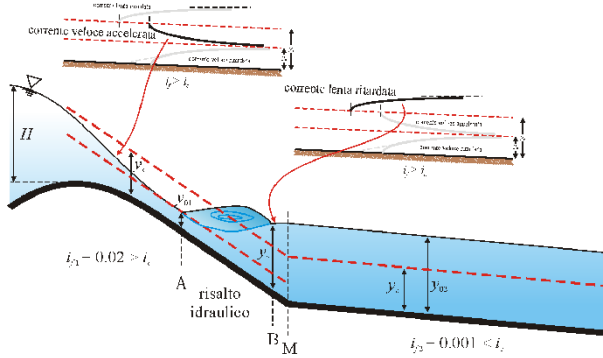


Figura 9.46. Profilo della corrente

Il tracciamento quantitativo del profilo a partire dalla sezione M (cambio di pendenza) può essere effettuato per via numerica. Si assuma, ad esempio, un passo di variazione dell'altezza idrica della corrente pari a:

$$\Delta y = \frac{(y_{02} - y_v)}{n}.$$

L'origine del sistema di coordinate con ascissa positiva verso valle è fissata nella sezione M. L'intervallo spaziale Δs_k che corrisponde alla variazione di altezza della corrente Δy_k può essere calcolato mediante la forma discretizzata dell'equazione del profilo:

$$\Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{(i_f - J_{med,k})}.$$

Δs_k è la differenza di coordinata tra la sezione nella quale la corrente ha altezza y_{k+1} e la sezione nella quale ha altezza y_k ; $\Delta E_k = E_{k+1} - E_k$; $J_{med,k} = 0.5(J_{k+1} + J_k)$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$$k = 60 \text{ m}^{1/3}/\text{s}, i_{f1} = 0.02, i_{f2} = 0.001, H = 4 \text{ m}.$$

Si calcola quanto segue:

$$y_c = \frac{4H}{5} = \frac{4 \times 4}{5} = 3.2 \text{ m}$$

$$Q = \sqrt{\frac{gy_c^5}{6}} = \sqrt{\frac{9.806 \times 3.2^5}{6}} = 23.42 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$y_{01} = \left(\frac{\sqrt{3} \times 4^{2/3} Q}{k \sqrt{i_{f1}}} \right)^{3/8} = \left(\frac{23.42 \times \sqrt{3} \times 4^{2/3}}{60 \times \sqrt{0.02}} \right)^{3/8} = 2.54 \text{ m}$$

$$y_{02} = \left(\frac{\sqrt{3} \times 4^{2/3} Q}{k \sqrt{i_{f2}}} \right)^{3/8} = \left(\frac{23.42 \times \sqrt{3} \times 4^{2/3}}{60 \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/8} = 4.46 \text{ m}$$

$$S_m = \gamma \frac{y_{01}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_{01}^2} \rightarrow S_m = 9806 \times \frac{2.54^3}{3 \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \times 1000 \times 23.42^2}{2.54^2} = 177\,932 \text{ N}$$

$$S_v = \gamma \frac{y_{02}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_{02}^2} \rightarrow S_v = 9806 \times \frac{4.46^3}{3 \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \times 1000 \times 23.42^2}{4.46^2} = 215\,092 \text{ N}.$$

Risulta $S_m < S_v$. Calcoliamo l'altezza coniugata di valle del risalto:

$$\underbrace{\gamma \frac{y_{01}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_{01}^2}}_{S_m \equiv S_{y_{01}}} = \underbrace{\gamma \frac{y_v^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\rho Q^2}{y_v^2}}_{S_v} \rightarrow$$

$$177\,932 \text{ N} = 9806 \times \frac{y_v^3}{3 \times \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3} \times 1000 \times 23.42^2}{y_v^2} \rightarrow y_v = 3.96 \text{ m}$$

$$\Delta y = \frac{(y_{02} - y_v)}{n} = \frac{(4.46 - 3.96)}{10} = 0.05 \text{ m}.$$

A partire dalla condizione di valle ($k = 1$), con $y_1 = y_{02}$, si calcola l'area della sezione bagnata:

$$\Omega_1 = \frac{y_1^2}{\sqrt{3}} = \frac{4.46^2}{\sqrt{3}} = 11.48 \text{ m}^2$$

la larghezza del pelo libero:

$$B_1 = \frac{2y_1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 4.46}{\sqrt{3}} = 5.15 \text{ m}$$

il perimetro bagnato:

$$P = \frac{4y_0}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times 4.46}{\sqrt{3}} = 10.30 \text{ m}$$

il raggio idraulico:

$$R_1 = \frac{y_1}{4} = \frac{4.46}{4} = 1.12 \text{ m}.$$

Quindi, si calcola la cadente dell'energia J_1 e l'energia E_1 sulla base dei dati della sezione:

$$J_1 = \frac{3 \times 4^{4/3} Q^2}{k^2 y_1^{16/3}} = \frac{3 \times 4^{4/3} \times 23.42^2}{60^2 \times 4.46^{16/3}} = 0.000999$$

$$E_1 = y_1 + \frac{Q^2}{2g\Omega_1^2} = 4.46 + \frac{23.42^2}{2 \times 9.806 \times 11.48^2} = 4.672 \text{ m}.$$

Tabella 9.8. Grandezze caratteristiche della corrente nell'alveo a partire dalla sezione M fino alla sezione A

k	y (m)	Ω (m ²)	B (m)	P (m)	R (m)	J (.)	J_{med} (.)	E (m)	ΔE (m)	Δs_k (m)	s_k (m)	S (kN)
1	4.46	11.48	5.15	10.30	1.12	0.000999	0.001030	4.672	-0.040	-2.12	0.00	215.2
2	4.41	11.23	5.09	10.18	1.10	0.001061	0.001094	4.632	-0.040	-2.10	-2.12	210.7
3	4.36	10.98	5.03	10.07	1.09	0.001128	0.001163	4.592	-0.039	-2.07	-4.22	206.4
4	4.31	10.72	4.98	9.95	1.08	0.001199	0.001238	4.553	-0.038	-2.05	-6.29	202.2
5	4.26	10.48	4.92	9.84	1.07	0.001276	0.001318	4.515	-0.038	-2.02	-8.34	198.2
6	4.21	10.23	4.86	9.72	1.05	0.001359	0.001404	4.477	-0.037	-1.99	-10.35	194.4
7	4.16	9.99	4.80	9.61	1.04	0.001448	0.001497	4.440	-0.036	-1.95	-12.34	190.8
8	4.11	9.75	4.75	9.49	1.03	0.001545	0.001597	4.404	-0.035	-1.92	-14.29	187.3
9	4.06	9.52	4.69	9.38	1.02	0.001649	0.001706	4.369	-0.034	-1.88	-16.21	183.9
10	4.01	9.28	4.63	9.26	1.00	0.001762	0.001823	4.334	-0.033	-1.83	-18.08	180.8
	3.96	9.05	4.57	9.15	0.99	0.001884		4.301			-19.91	177.9

Il calcolo viene ripetuto nella sezione 2 ottenendo i seguenti risultati:

$y_2 = 4.41$ m, $\Omega_2 = 11.23$ m², $B_2 = 5.09$ m, $P_2 = 10.18$ m, $R_2 = 1.10$ m, $J_2 = 0.001061$, $E_2 = 4.632$ m.

Per la corrente tra la sezione 1 e la sezione 2 si calcola una cadente pari alla media di J_1 e J_2 :

$$J_{med,1} = \frac{J_1 + J_2}{2} = \frac{0.000999 + 0.001061}{2} = 0.00103$$

e la variazione di energia:

$$\Delta E_1 = E_2 - E_1 = 4.63 - 4.67 = -0.040 \text{ m.}$$

L'equazione del profilo permette di calcolare la distanza tra le due sezioni:

$$\Delta s_1 = \frac{\Delta E_1}{(i_f - J_{med,1})} = \frac{-0.040}{(0.02 - 0.00103)} = -2.12 \text{ m.}$$

La coordinata della sezione 2 sarà pari a:

$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = 0 - 2.12 = -2.12 \text{ m.}$$

Il calcolo viene ripetuto per tutte le sezioni e i tronchi successivi, fino a raggiungere l'altezza coniugata di valle del risalto. I risultati sono riportati in Tabella 9.8.

La sezione B è collocata a 19.91 m verso monte dalla sezione M.

Per stimare la lunghezza del risalto, calcoliamo il numero di Froude della corrente veloce:

$$\begin{aligned}\Omega_{01} &= \frac{y_{01}^2}{\sqrt{3}} = \frac{2.54^2}{\sqrt{3}} = 3.72 \text{ m}^2 \\ B_{01} &= \frac{2y_{01}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 2.54}{\sqrt{3}} = 2.93 \text{ m} \\ y_{media,m} &\equiv y_{media,01} = \frac{\Omega_{01}}{B_{01}} = \frac{3.72}{2.93} = 1.27 \text{ m} \\ V_m &\equiv V_{01} = \frac{Q}{\Omega_{01}} = \frac{23.42}{3.72} = 6.30 \text{ m/s} \\ Fr_m &= \frac{V_m}{\sqrt{gy_{media,m}}} = \frac{6.30}{\sqrt{9.806 \times 1.27}} = 1.78.\end{aligned}$$

Quindi, sulla base dei dati sperimentali in Tabella 9.7, risulta:

$$L \simeq 7.6 (y_v - y_m) = 7.6 \times (3.96 - 2.54) = 10.8 \text{ m}.$$

La sezione A (inizio del risalto) è collocata a circa 10.8 m a monte della sezione B.

Esercizio 9.21

In un canale a sezione rettangolare, di larghezza $b = (3.5 + C_{pu}/5)$ m con scabrezza del fondo e delle pareti pari a $k = 70 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, è inserita una paratoia a spigolo vivo che lascia aperta sul fondo una luce rettangolare di altezza $a = 0.8 \text{ m}$ ($C_c = 0.61$) (Figura 9.47). Immediatamente a monte della paratoia il valore della profondità idrica è $y_m = (2 + C_u/10)$ m. Il canale ha pendenza del fondo $i_{f1} = 0.001$ in un primo tratto e $i_{f2} = 0.02$ in un secondo tratto.

- Determinare il valore della portata.
 - Tracciare qualitativamente il profilo di moto permanente della corrente.
 - Verificare se sia presente un risalto idraulico e, in caso affermativo, indicare i valori delle altezze coniugate e l'energia dissipata nello stesso.
 - Tracciare inoltre quantitativamente il profilo, a partire dalla sezione del cambio di pendenza.
- ◇ Il cambio di pendenza è molto lontano dalla paratoia. Si assuma $n = 10$.

Soluzione

La determinazione della portata nel canale avviene scrivendo un bilancio energetico tra la sezione a monte della paratoia e la sezione contratta, trascurando le

dissipazioni nel processo di efflusso sotto battente:

$$\underbrace{z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \frac{V_m^2}{2g}}_{H_m} = \underbrace{z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g}}_{H_c} \rightarrow$$

$$y_m + \frac{Q^2}{2gb^2 y_m^2} = C_c a + \frac{Q^2}{2gb^2 (C_c a)^2}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2gb^2 (y_m - C_c a)}{\left[\frac{1}{(C_c a)^2} - \frac{1}{y_m^2} \right]}}.$$

Noto il valore di Q è possibile procedere alla determinazione dell'altezza critica y_c :

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}.$$

È inoltre possibile scrivere l'equazione di Chezy per determinare il valore dell'altezza di moto uniforme per il due tronchi caratterizzati, rispettivamente, dalla pendenza i_{f1} ed i_{f2} :

$$Q = kR_1^{1/6} \Omega_1 \sqrt{R_1 i_{f1}}$$

$$Q = kR_2^{1/6} \Omega_2 \sqrt{R_2 i_{f2}}$$

dove:

$$\Omega_1 = by_{01}, R_1 = \frac{\Omega_1}{P_1} = \frac{by_{01}}{b + 2y_{01}}$$

$$\Omega_2 = by_{02}, R_2 = \frac{\Omega_2}{P_2} = \frac{by_{02}}{b + 2y_{02}}.$$

Il calcolo dell'altezza di moto uniforme deve essere eseguito numericamente.

Nel caso proposto sussiste sempre la relazione $y_{02} < y_c < y_{01}$; il primo tronco risulta a debole pendenza mentre il secondo tronco risulta essere a forte pendenza.

L'elevata distanza presente tra la sezione della paratoia e il cambio di pendenza garantisce che nel tronco a debole pendenza possa svilupparsi una corrente lenta e un passaggio spontaneo attraverso lo stato critico al cambio di pendenza.

In una sezione interna al primo tronco (di pendenza inferiore) deve avvenire l'incontro tra la corrente veloce uscente dalla paratoia e quella lenta governata dalla presenza dello stato critico al cambio di pendenza.

Tale incontro avviene attraverso un risalto idraulico che ha luogo in una sezione in cui le spinte totali S_m e S_v delle correnti provenienti da monte (di tirante idrico y_m) e da valle (di tirante idrico y_v) sono uguali:

$$\underbrace{\frac{\gamma by_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_m}}_{S_m} = \underbrace{\frac{\gamma by_v^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{by_v}}_{S_v}.$$

Come è noto le altezze y_m e y_v si dicono coniugate.

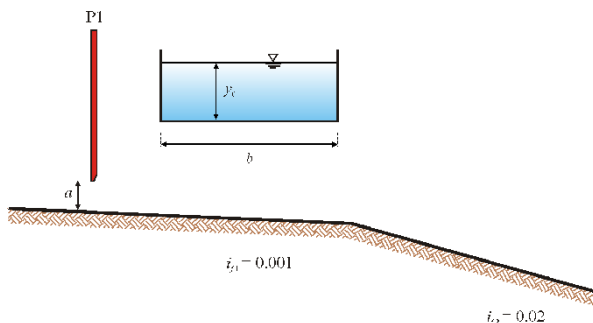


Figura 9.47. Schema del canale con variazione di pendenza e con una paratoia di regolazione

Data, inoltre, l'elevata distanza tra il cambio di pendenza e la paratoia si può ritenere con buona approssimazione che l'altezza coniugata del risalto y_v di corrente lenta sia praticamente coincidente con l'altezza di moto uniforme della corrente nel primo tronco, y_{01} . Pertanto, risulta:

$$\underbrace{\frac{\gamma b y_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_m}}_{S_m} = \underbrace{\frac{\gamma b y_{01}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_{01}}}_{S_{01}}.$$

L'equazione risultante è cubica nell'incognita y_m e può essere risolta per tentativi a partire da valori minori di y_c oppure mediante la divisione del polinomio di terzo grado in y_m per il binomio $(y_m - y_{01})$ essendo nota l'altezza di moto uniforme y_{01} anch'essa radice dell'equazione.

L'energia dissipata nel risalto vale:

$$\Delta E_{\text{risalto}} = \frac{(y_v - y_m)^3}{4 y_v y_m} = \frac{(y_{01} - y_m)^3}{4 y_{01} y_m}.$$

Il profilo di moto permanente risultante è rappresentato qualitativamente in Figura 9.48.

Il profilo della corrente a valle della paratoia è, nel caso in esame, un profilo di corrente *veloce ritardata* in alveo a *debole pendenza*, e viene tracciato verso valle a partire dalla sezione contratta. Tale profilo, qualora potesse svilupparsi completamente, raggiungerebbe con tangente verticale l'altezza critica y_c ad una distanza finita dalla sezione contratta. La presenza di un passaggio spontaneo attraverso lo stato critico al cambio di pendenza garantisce la presenza di una corrente lenta a monte del cambio di pendenza stesso. Il profilo è di corrente lenta accelerata che si traccia verso monte a partire dal cambio di pendenza, e si interrompe in corrispondenza del risalto idraulico.

A valle del cambio di pendenza il profilo della corrente è di corrente veloce accelerata e deve essere tracciato da monte verso valle partendo dall'altezza critica y_c . La corrente tende alla condizione di moto uniforme asintoticamente verso valle.

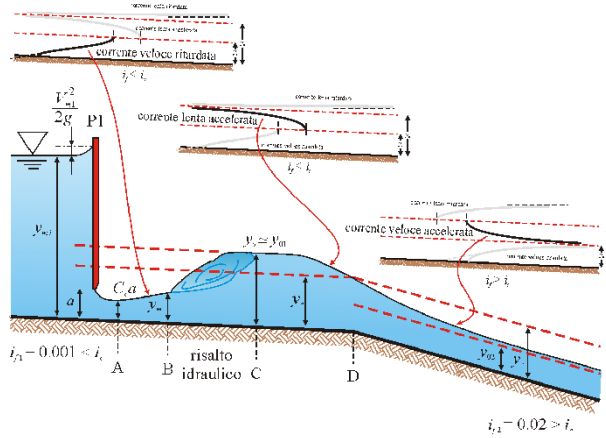


Figura 9.48. Profilo della corrente

Il tracciamento quantitativo del profilo a partire dalla sezione D (cambio di pendenza) verso valle può essere effettuato per via numerica. Si assuma, ad esempio, un passo di variazione dell'altezza idrica della corrente pari a:

$$\Delta y = \frac{(y_c - y_{02})}{n}.$$

L'origine del sistema di riferimento positivo verso valle è posta al cambio di pendenza. L'intervallo spaziale Δs_k che corrisponde alla variazione di altezza della corrente Δy_k può essere calcolato mediante la forma discretizzata dell'equazione del profilo:

$$\Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{(i_f - J_{med,k})}.$$

Δs_k è la differenza di coordinata tra la sezione nella quale la corrente ha altezza y_{k+1} e la sezione nella quale ha altezza y_k ; $\Delta E_k = E_{k+1} - E_k$; $J_{med,k} = 0.5(J_{k+1} + J_k)$.

Per $C_u = C_{pu} = 0$ risulta:

$b = 3.5$ m, $k = 70$ m^{1/3}/s, $a = 0.8$ m, $C_c = 0.61$, $y_m = 2$ m, $i_{f1} = 0.001$, $i_{f2} = 0.02$.

$$Q = \sqrt{\frac{2gb^2(y_m - C_c a)}{\left[\frac{1}{(C_c a)^2} - \frac{1}{y_m^2}\right]}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.806 \times 3.5^2 \times (2 - 0.61 \times 0.8)}{\left(\frac{1}{0.61^2 \times 0.8^2} - \frac{1}{2^2}\right)}} = 9.59 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{9.59^2}{9.806 \times 3.5^2}} = 0.91 \text{ m}$$

$$y_{01} = 1.45 \text{ m}$$

$$y_{02} = 0.51 \text{ m}$$

Tabella 9.9. Grandezze caratteristiche della corrente nell'alveo a partire dalla sezione D asintoticamente verso valle

k	y (m)	Ω (m)	P (m)	R (m)	J (.)	J_{med} (.)	E (m)	ΔE (m)	Δs_k (m)	s_k (m)
1	0.91	3.19	5.32	0.60	0.003667	0.003921	1.372	0.003	0.22	0.00
2	0.87	3.05	5.24	0.58	0.004174	0.004479	1.376	0.010	0.64	0.22
3	0.83	2.91	5.16	0.56	0.004784	0.005154	1.386	0.018	1.19	0.86
4	0.79	2.77	5.08	0.54	0.005524	0.005978	1.403	0.027	1.94	2.05
5	0.75	2.63	5.00	0.53	0.006431	0.006994	1.431	0.039	2.99	3.99
6	0.71	2.49	4.92	0.51	0.007556	0.008263	1.469	0.053	4.55	6.97
7	0.67	2.35	4.84	0.48	0.008969	0.009870	1.523	0.072	7.08	11.52
8	0.63	2.21	4.76	0.46	0.010770	0.011937	1.594	0.095	11.81	18.60
9	0.59	2.07	4.68	0.44	0.013103	0.014642	1.690	0.126	23.47	30.41
10	0.55	1.93	4.60	0.42	0.016181	0.018256	1.815	0.166	∞	53.88
	y_{02}	1.79	4.52	0.39	$\rightarrow 0.020$		1.982		∞	∞

$$\Delta y = \frac{(y_c - y_{02})}{n} = \frac{(0.91 - 0.51)}{10} = 0.04 \text{ m.}$$

I risultati sono riportati in Tabella 9.9.

$$\underbrace{\frac{\gamma b y_m^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_m}}_{S_m} = \underbrace{\frac{\gamma b y_{01}^2}{2} + \frac{\rho Q^2}{b y_{01}}}_{S_{01}} \rightarrow$$
$$\frac{9806 \times 3.5 \times y_m^2}{2} + \frac{1000 \times 9.59^2}{3.5 \times y_m} = \frac{9806 \times 3.5 \times 1.45^2}{2} + \frac{1000 \times 9.59^2}{3.5 \times 1.45} \rightarrow$$
$$y_m = 0.53 \text{ m}$$

$$\Delta E_{risalto} = \frac{(y_{01} - y_m)^3}{4 y_{01} y_m} = \frac{(1.45 - 0.53)^3}{4 \times 1.45 \times 0.53} = 0.25 \text{ m.}$$

Come caso particolare se il canale a valle della paratoia prima del cambio di pendenza non è lungo a sufficienza, può succedere che il risalto non si formi e la corrente rimanga ovunque veloce. Il profilo nel secondo tronco può essere di corrente veloce accelerata o veloce ritardata a seconda che l'altezza raggiunta nella sezione D sia maggiore o minore di y_{02} .

Appendice A

Parametri geometrici e statici per sezioni piane comuni e superfici e volumi di solidi

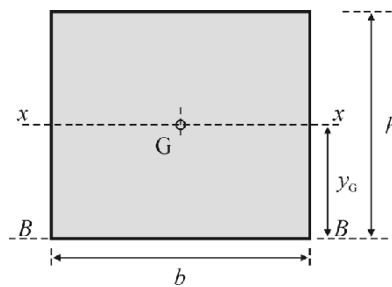


Figura A.1. Rettangolo

$$y_G = \frac{h}{2} \quad A = bh$$
$$I_{Gxx} = \frac{1}{12}bh^3 \quad I_{Bxx} = \frac{1}{3}bh^3$$

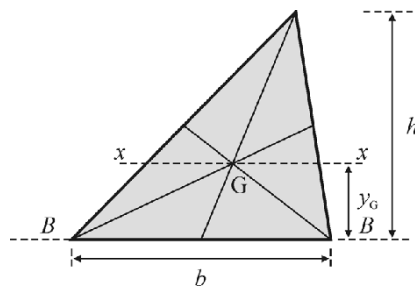


Figura A.2. Triangolo

$$y_G = \frac{h}{3} \quad A = \frac{bh}{2}$$

$$I_{Gxx} = \frac{1}{36}bh^3 \quad I_{Bxx} = \frac{1}{12}bh^3$$

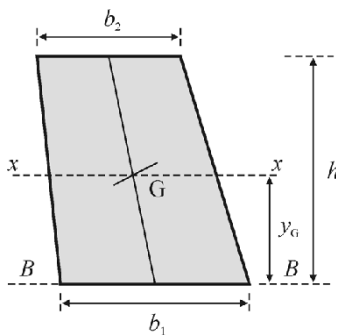


Figura A.3. Trapezio

$$y_G = \frac{h}{3} \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \quad A = \frac{b_1 + b_2}{2}h$$

$$I_{Gxx} = \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{36(b_1 + b_2)}h^3 \quad I_{Bxx} = \frac{1}{12}(b_1 + 3b_2)h^3$$

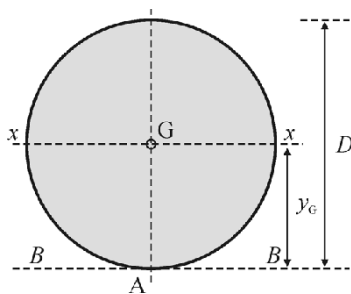


Figura A.4. Cerchio

$$y_G = \frac{D}{2} \quad A = \pi \frac{D^2}{4}$$

$$I_{Gxx} = \pi \frac{D^4}{64} \quad I_{Bxx} = 5\pi \frac{D^4}{64}$$

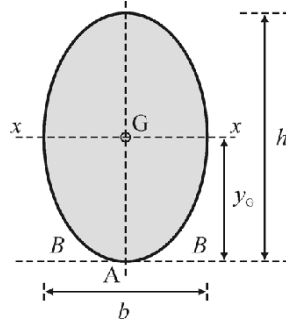


Figura A.5. Ellisse

$$y_G = \frac{h}{2} \quad A = \pi \frac{bh}{4}$$

$$I_{Gxx} = \pi \frac{bh^3}{64} \quad I_{Bxx} = 5\pi \frac{bh^3}{64}$$

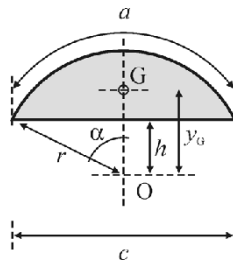


Figura A.6. Segmento circolare

$$y_G = \frac{c^3}{6(ar - hc)} \quad A = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{r(a - c) + c(r - h)}{2}$$

$$I_{Gxx} = \frac{1}{16} r^4 (4\alpha - \sin 4\alpha) \quad I_{Bxx} = \frac{1}{16} r^4 \left(4\alpha - \sin 4\alpha + \frac{64}{9} \frac{\sin^6 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha - \alpha} \right)$$

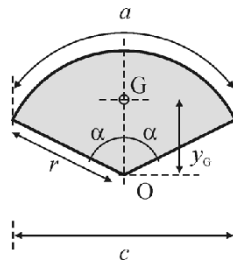


Figura A.7. Settore circolare

$$y_G = \frac{2rc}{3a} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad A = \alpha r^2$$

$$I_{Gxx} = \frac{r^4}{4} \alpha + \frac{r^4}{8} \sin 2\alpha - \frac{4r^4}{9} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} \quad I_{Bxx} = \frac{r^4}{4} \alpha + \frac{r^4}{8} \sin 2\alpha$$

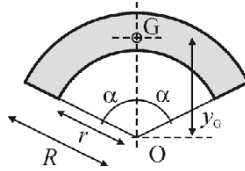


Figura A.8. Settore di corona circolare

$$y_G = \frac{2}{3} \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad A = \alpha (R^2 - r^2)$$

$$I_{Gxx} = \frac{(R^4 - r^4)}{4} \alpha + \frac{(R^4 - r^4)}{8} \sin 2\alpha - \frac{4}{9} \frac{(R^3 - r^3)^2}{(R^2 - r^2)} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha}$$

$$I_{Bxx} = \frac{(R^4 - r^4)}{4} \alpha + \frac{(R^4 - r^4)}{8} \sin 2\alpha$$

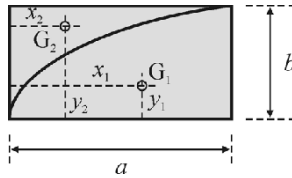


Figura A.9. Settore di parabola

$$y_1 = \frac{3}{8}b, x_1 = \frac{3}{5}a \quad A_1 = \frac{2}{3}ab$$

$$y_2 = \frac{3}{4}b, x_2 = \frac{3}{10}a \quad A_2 = \frac{1}{3}ab$$

Superfici e volumi di solidi

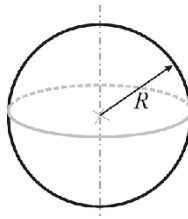


Figura A.10. Sfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad A_{lat} = 4\pi R^2$$

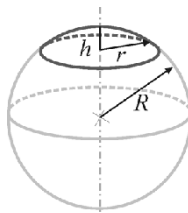


Figura A.11. Calotta sferica

$$V = \frac{\pi}{3}h^3(3R - h) = \frac{\pi}{2}h\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right) \quad A_{lat} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2)$$

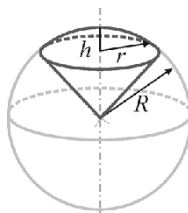


Figura A.12. Settore sferico

$$V = \frac{2\pi}{3}R^2h \quad A_{lat} = \pi R(r + 2h)$$

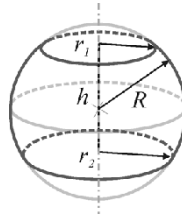


Figura A.13. Segmento sferico a due basi

$$V = \frac{\pi h}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{\pi h^3}{6} \quad A_{lat} = 2\pi R h$$

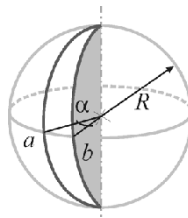


Figura A.14. Fuso sferico

$$V = \frac{2}{3} R^3 \alpha \quad A_{lat} = 2R^2 \alpha$$

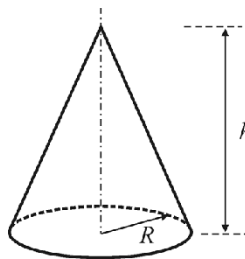


Figura A.15. Cono

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h \quad A_{lat} = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}$$

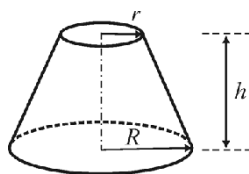


Figura A.16. Tronco di cono

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + r^2 + rR) \quad A_{lat} = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

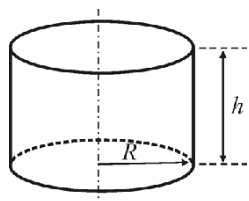


Figura A.17. Cilindro

$$V = \pi R^2 h \quad A_{lat} = 2\pi R h$$

Appendice B

Proprietà fisiche dei fluidi

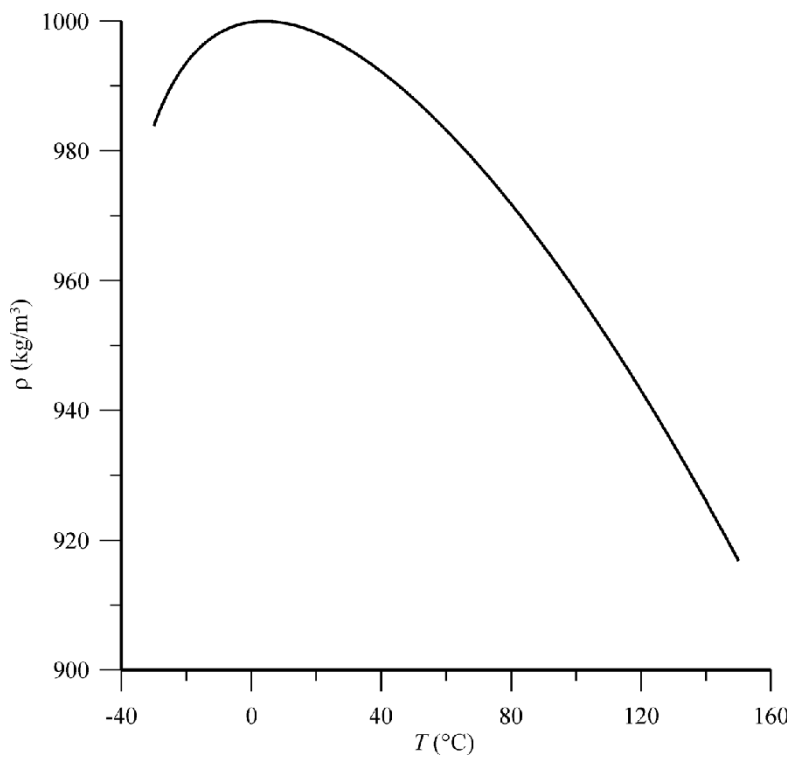


Figura B.1. Densità dell'acqua in funzione della temperatura

Tabella B.1. Densità dell'acqua

T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)
-20	993.550	40	992.2187
-15	996.286	45	990.2162
-10	998.120	50	988.0393
-5	999.259	55	985.6982
0	999.8425	60	983.2018
5	999.9668	65	980.5578
10	999.7026	70	977.7726
15	999.1026	75	974.8519
18	998.5986	80	971.8007
20	998.2071	85	968.6232
25	997.0479	90	965.3230
30	995.6502	95	961.9033
35	994.0349	100	958.3665

Equazione interpolante (valida tra -30 °C e +150 °C):

$$\rho \left(\text{kg/m}^3 \right) = \frac{\left(\begin{array}{l} 999.83952 + 16.945176T - 7.9870401 \times 10^{-3}T^2 \\ -46.170461 \times 10^{-6}T^3 + 105.56302 \times 10^{-9}T^4 \\ -280.54253 \times 10^{-12}T^5 \end{array} \right)}{(1 + 16.879850 \times 10^{-3}T)} T \text{ in } ^\circ\text{C}.$$

Tabella B.2. Densità dell'acqua pura degassata

T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)
0	999.87	40	992.24
3.98	1000.0	45	990.25
5	999.99	50	988.07
10	999.73	55	985.73
15	999.13	60	983.24
18	998.62	65	980.59
20	998.23	70	977.81
25	997.07	75	974.89
30	995.67	80	971.83
35	994.06	85	968.65
38	992.99	90	965.34
		95	961.92
		100	958.38

Tabella B.3. Densità dell'aria alla pressione di 1 bar

T (°C)	ρ (kg/m ³)	T (°C)	ρ (kg/m ³)
10	1.247	21	1.201
11	1.243	22	1.197
12	1.239	23	1.193
13	1.234	24	1.189
14	1.230	25	1.185
15	1.226	26	1.181
16	1.221	27	1.177
17	1.217	28	1.173
18	1.213	29	1.169
19	1.209	30	1.165
20	1.205		

Equazione interpolante:

$$\rho \left(\text{kg/m}^3 \right) = \frac{1.293}{(1 + 0.00367T)} p \quad T \text{ in } ^\circ\text{C}, p \text{ in bar.}$$

Tabella B.4. Tensione superficiale dell'acqua all'interfaccia con l'aria

T (°C)	σ (N/m)	T (°C)	σ (N/m)
-8	77.0×10^{-3}	40	69.56×10^{-3}
-5	76.4×10^{-3}	50	67.91×10^{-3}
0	$75.6. \times 10^{-3}$	60	66.18×10^{-3}
5	74.9×10^{-3}	70	64.4×10^{-3}
10	74.22×10^{-3}	80	62.6×10^{-3}
15	73.49×10^{-3}	100	58.9×10^{-3}
18	73.05×10^{-3}		
20	72.75×10^{-3}		
25	71.97×10^{-3}		
30	71.18×10^{-3}		

Tabella B.5. Tensione di vapore dell'acqua

T ($^{\circ}\text{C}$)	p_{vap} (Pa)	T ($^{\circ}\text{C}$)	p_{vap} (Pa)
-15	191.45	55	15737.32
-10	286.50	60	19915.64
-5	421.69	65	25003.20
0	610.48	70	31157.35
5	872.32	75	38543.39
10	1227.76	80	47342.64
15	1704.921	85	57808.41
20	2337.80	90	70095.37
25	3167.19	95	84512.81
30	4242.83	100	101324.72
35	5622.85	105	120799.06
40	7375.90	110	143262.48
45	9583.18	115	169049.62
50	12333.61	120	198535.12

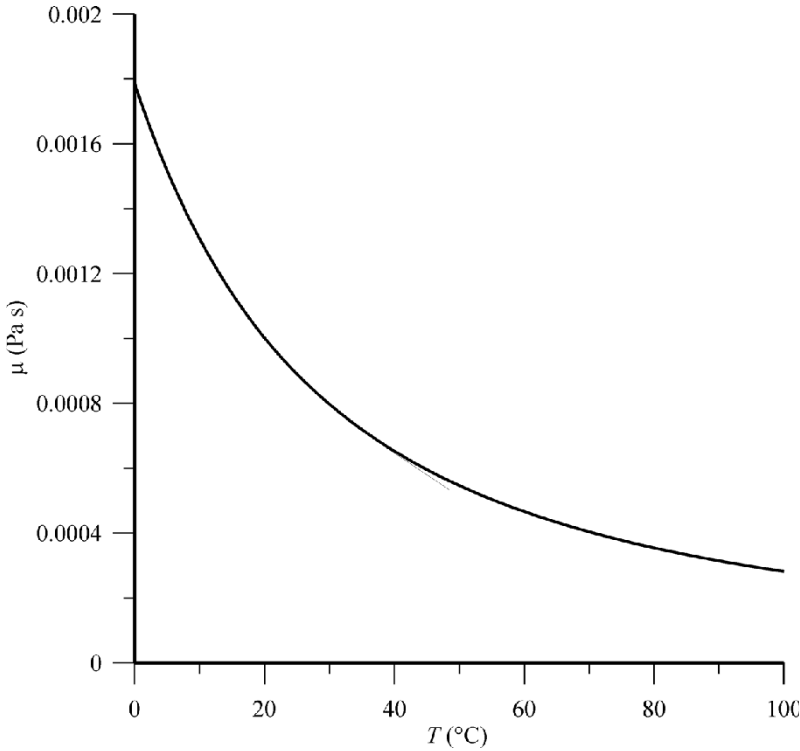


Figura B.2. Viscosità dinamica dell'acqua in funzione della temperatura

Tabella B.6. Viscosità dinamica dell'acqua

T (°C)	μ (Pa s)	T (°C)	μ (Pa s)
0	1.787×10^{-3}	55	0.5040×10^{-3}
5	1.519×10^{-3}	60	0.4665×10^{-3}
10	1.307×10^{-3}	65	0.4335×10^{-3}
15	1.139×10^{-3}	70	0.4042×10^{-3}
20	1.002×10^{-3}	75	0.3781×10^{-3}
25	0.8904×10^{-3}	80	0.3547×10^{-3}
30	0.7975×10^{-3}	85	0.3337×10^{-3}
35	0.7194×10^{-3}	90	0.3147×10^{-3}
40	0.6529×10^{-3}	95	0.2975×10^{-3}
45	0.5960×10^{-3}	100	0.2818×10^{-3}
50	0.5468×10^{-3}		

Equazione interpolante:

$$\log_{10} \mu = \frac{1301}{998.333 + 8.1855(T - 20) + 0.00585(T - 20)^2} - 4.30233$$

(T in °C, μ in Pa s) per T tra 0° e 20 °C

$$\log_{10} \frac{\mu}{\mu_{20}} = \frac{1.3272(20 - T) - 0.001053(20 - T)^2}{T + 105} \quad \text{per } T \text{ tra } 20^\circ \text{ e } 100^\circ \text{C}.$$

Tabella B.7. Viscosità dinamica dell'aria

T (°C)	μ (Pa s)	T (°C)	μ (Pa s)
-100	1.16×10^{-5}	20	1.81×10^{-5}
-50	1.45×10^{-5}	30	1.86×10^{-5}
-20	1.61×10^{-5}	40	1.90×10^{-5}
-10	1.66×10^{-5}	50	1.95×10^{-5}
0	1.71×10^{-5}	100	2.18×10^{-5}
10	1.76×10^{-5}		

Tabella B.8. Modulo di comprimibilità isoentropica dell'acqua

T (°C)	ε (GPa)	T (°C)	ε (GPa)
-10	1.801	25	2.210
-5	1.885	30	2.235
0	1.962	35	2.251
5	2.029	40	2.261
10	2.088	45	2.265
15	2.138	50	2.264
20	2.178		

Tabella B.9. Modulo di comprimibilità isoentropica di alcuni liquidi a 20 °C

<i>Liquido</i>	ε (GPa)	<i>Liquido</i>	ε (GPa)
Benzene	1.48	Olio lubrificante	1.44
Glicerina	4.59	Mercurio	28.5
Kerosene	1.43	Acqua di mare	2.42

Tabella B.10. Densità relativa s di alcuni liquidi manometrici (relativa all'acqua alla temperatura di 4 °C, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

<i>Liquido</i>	s
Benzene	0.879
Mercurio	13.55
Meriam red oil	0.827
Meriam blue	1.75

Tabella B.11. Densità relativa s di alcuni materiali (relativa all'acqua alla temperatura di 4 °C, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

<i>Materiale</i>	s
Acciaio	7.83
Alluminio	2.64
Calcestruzzo (dopo maturazione)	2.4
Calcestruzzo liquido	2.5
Ghisa	7.08
Legno di pino chiaro	0.43
Legno di quercia	0.77
Piombo	11.4
Rame	8.91

Appendice C

Perdite di carico nelle condotte e nei canali

Condotte circolari cilindriche

Formula di Coolebrook-White:

$$J = \lambda \frac{U^2}{2g} \frac{1}{D}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right).$$

Regime di parete liscia:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{Prandtl})$$
$$\lambda = 0.316 \text{Re}^{-0.25} \quad \text{Re} \leq 10^5 \quad (\text{Blasius})$$
$$\lambda = 0.0031 + 0.221 \text{Re}^{-0.237} \quad \text{Re} > 10^5 \quad (\text{Nikuradse}).$$

Regime puramente turbolento:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_\infty}} = -2 \log_{10} \left(\frac{1}{3.71} \frac{\varepsilon}{D} \right) \quad (\text{Prandtl-Nikuradse}).$$

Formule antiche

$$J = \frac{V^2}{\chi^2 R} \quad \text{con } R = \frac{D}{4}$$
$$\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{D/4}}} \quad (\text{Bazin})$$
$$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{D/4}}} \quad (\text{Kutter})$$
$$\chi = k \left(\frac{D}{4} \right)^{1/6} \quad (\text{Gauckler-Strickler}).$$

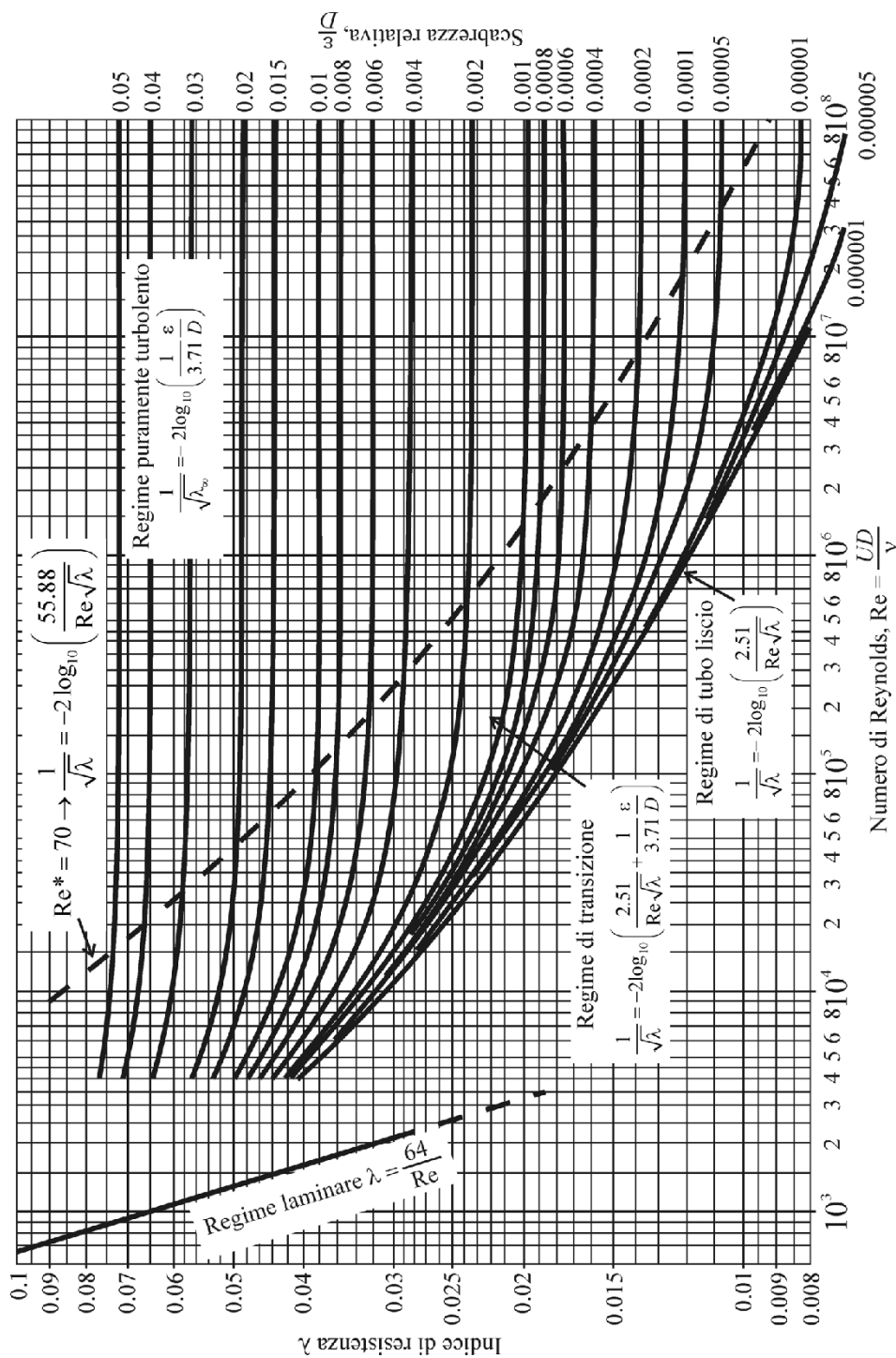


Figura C.1. Abaco di Moody

Tabella C.1. Coefficienti di scabrezza per le condotte circolari cilindriche

<i>Tipo di condotta</i>	<i>Scabrezza equivalente ε (mm)</i>	<i>Bazin m ($\text{m}^{1/2}$)</i>	<i>Kutter γ ($\text{m}^{1/2}$)</i>	<i>Gauckler- Strickler k ($\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$)</i>
Tubazioni lisce (vetro, ottone, rame trafilato, resina)	$0 \div 0.02$			
Tubazioni in acciaio con rivestimenti degradabili nel tempo	$0.05 \div 3.0$	0.06	0.12	$70 \div 120$
Tubazioni in acciaio con rivestimenti non degradabili nel tempo	$0.05 \div 0.15$	$0.10 \div 0.23$	$0.15 \div 0.35$	120
Tubazioni in lamiera saldata in buone condizioni	$0.2 \div 0.3$	0.06	0.12	90
Tubazioni in lamiera saldata in servizio corrente, con incrostazioni	$0.4 \div 1.0$	0.16	$0.20 \div 0.25$	$75 \div 87$
Tubazioni in lamiera chiodata nuove	$0.3 \div 3.0$	$0.10 \div 0.30$	$0.18 \div 0.35$	$70 \div 90$
Tubazioni in lamiera chiodata con incrostazioni	fino a 5.0	0.36	0.45	65
Tubazioni in ghisa nuove	$0.1 \div 0.4$	$0.06 \div 0.10$	$.12 \div 0.15$	$90 \div 100$
Tubazioni in ghisa incrostate	$0.4 \div 5.0$	$0.16 \div 0.36$	$0.20 \div 0.45$	$65 \div 85$
Tubazioni in cemento nuove	$0.1 \div 0.15$	0.06	0.12	$100 \div 105$
Tubazioni in cemento in servizio corrente	$2.0 \div 5.0$	$0.23 \div 0.36$	$0.30 \div 0.45$	$65 \div 70$

Perdita di carico concentrata per riduzione graduale di sezione

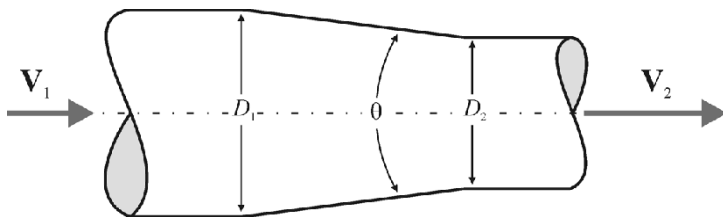


Figura C.2. Riduzione di sezione per condotta circolare

Perdita di carico espressa come:

$$H_1 - H_2 = \xi \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\xi = \frac{0.8 \sin(\theta/2) \left[1 - (D_2/D_1)^2\right]}{(D_2/D_1)^4} \quad \text{se } \theta \leq 45^\circ$$

$$\xi = \frac{0.5 \sqrt{\sin(\theta/2)} \left[1 - (D_2/D_1)^2\right]}{(D_2/D_1)^4} \quad \text{se } 45^\circ < \theta \leq 180^\circ.$$

Perdita di carico concentrata per allargamento graduale di sezione

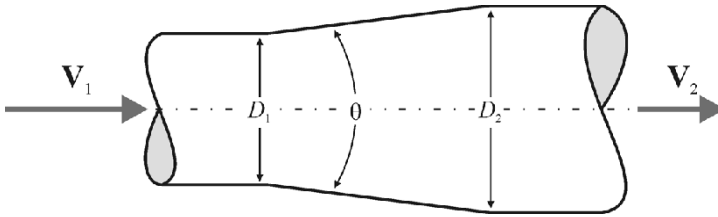


Figura C.3. Allargamento di sezione per condotta circolare

Perdita di carico espressa come:

$$H_1 - H_2 = \xi \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\xi = \frac{2.6 \sin(\theta/2) \left[1 - (D_1/D_2)^2\right]^2}{(D_1/D_2)^4} \quad \text{se } \theta \leq 45^\circ$$

$$\xi = \frac{\left[1 - (D_1/D_2)^2\right]^2}{(D_1/D_2)^4} \quad \text{se } 45^\circ < \theta \leq 180^\circ.$$

Perdita di carico per valvole, curve, giunzioni a T

Perdita di carico espressa come:

$$H_1 - H_2 = \xi \frac{V^2}{2g}.$$

Tabella C.2. Coefficiente di perdita di carico ξ per curve flangiate a 90° (r = raggio di curvatura dell'asse, D = diametro nominale) (da Crane, Co., *Flow of Fluids*, Tech. Paper 410, 1979)

<i>diámetro nominale in pollici</i>										
r/D	1/2	3/4	1	2	3	4	5	6	$8 \div 10$	$12 \div 16$
1	0.54	0.50	0.46	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.26
3	0.32	0.30	0.276	0.228	0.216	0.204	0.192	0.18	0.168	0.156
6	0.459	0.425	0.391	0.32	0.31	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22
10	0.81	0.75	0.69	0.57	0.54	0.51	0.48	0.45	0.42	0.39
14	1.03	0.95	0.87	0.72	0.68	0.65	0.61	0.57	0.53	0.49
20	1.35	1.25	1.15	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65

Tabella C.3. Coefficiente di perdita di carico ξ per alcuni pezzi speciali d'impianto (da Crane, Co. *Flow of Fluids*, Tech. Paper 410, 1979)

<i>diámetro nominale in pollici</i>													
	1/2	3/4	1	1 + 1/2	2	3	4	5	6	8 ÷ 10	12 ÷ 16	18 ÷ 24	
Saracinesca a ghigliottina (aperta)	0.22	0.20	0.18	0.16		0.15	0.14	0.14	0.13	0.12	0.11	0.10	0.096
Valvola a sfera (aperta)	9.2	8.5	7.8	7.1		6.5	6.1	5.8	5.4	5.1	4.8	4.4	4.1
Gomito standard a 90°	0.80	0.75	0.69	0.63		0.57	0.54	0.51	0.48	0.45	0.42	0.39	0.36
Gomito standard a 45°	0.43	0.40	0.37	0.34		0.30	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22	0.21	0.19
T standard (per flusso passante)	0.54	0.50	0.46	0.42		0.38	0.36	0.34	0.32	0.30	0.28	0.26	0.24
T standard (per flusso deviato)	1.62	1.50	1.38	1.26		1.14	1.08	1.02	0.96	0.90	0.84	0.78	0.72

Tabella C.4. Coefficienti di perdita di carico per imbocco e sbocco di condotte circolari

<i>Imbocco</i>	ξ	<i>Sbocco</i>	ξ
A spigolo vivo	0.50	A spigolo vivo	1.0
Condotta rientrante	1.16	Sbocco conico	$0.20 \div 0.50$
Con boccaglio d'invito	0.06		
Imbocco arrotondato	$0.06 \div 0.10$		
Imbocco conico	$0.10 \div 0.25$		

Canali a pelo libero

$$J = \lambda \frac{U^2}{2g} \frac{1}{4R}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.83}{f \text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{13.3} \frac{\varepsilon}{fR} \right)$$

R = raggio idraulico = Area/Perimetro resistente

f = fattore di forma

Tabella C.6. Fattore di forma (modificata da Marchi, E., Rubatta, A., *Meccanica dei Fluidi*, UTET, 1981)

<i>Forma della sezione</i>	<i>fattore di forma f</i>
Triangolare equilatera	$1.30 \div 1.25$
Triangolare retta	$1.20 \div 1.15$
Semicircolare	0.90
Semiesagonale	$1.00 \div 0.90$
Trapezia molto larga	0.80
Rettangolare ($b = 2y$)	0.95
Rettangolare molto larga	0.80

Regime di parete liscia:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.83}{f \text{Re} \sqrt{\lambda}} \right).$$

Regime puramente turbolento:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\infty}}} = -2 \log_{10} \left(\frac{1}{13.3} \frac{\varepsilon}{fR} \right).$$

Formule antiche

$$J = \frac{Q^2}{\chi^2 \Omega^2 R}$$

$$\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \quad (\text{Bazin})$$

$$\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad (\text{Kutter})$$

$$\chi = kR^{1/6} \quad (\text{Gauckler - Strickler}).$$

Ω = area della sezione trasversale della corrente.

Tabella C.7. Coefficienti di scabrezza per i canali (modificata da Marchi, E., Rubatta, A., *Meccanica dei Fluidi*, UTET, 1981)

<i>Tipo di canale</i>	<i>Scabrezza equivalente ε (mm)</i>	<i>Bazin m ($\text{m}^{1/2}$)</i>	<i>Kutter γ ($\text{m}^{1/2}$)</i>	<i>Gauckler- Strickler k ($\text{m}^{1/3} \text{s}^{-1}$)</i>
Pareti di cemento liscia- to, di legno piallato, me- talliche senza giunti, senza curve	$0.15 \div 0.2$	0.06	0.12	$100 \div 90$
idem ma con curve	$0.2 \div 0.4$	0.10	0.18	$90 \div 85$
Pareti di cemento non li- sciato, muratura di matto- ni regolare e pareti metal- liche chiodate	$0.4 \div 1.0$	0.15	$0.20 \div 0.25$	$85 \div 75$
Pareti di cemento non li- sciato, muratura ordinaria, legno grezzo	$2 \div 5$	$0.23 \div 0.36$	$0.35 \div 0.55$	$70 \div 65$
Pareti di cemento parzial- mente intonacate, muratu- ra irregolare, terra regolare senza vegetazione	8	0.46	$0.55 \div 0.75$	60
Terra abbastanza regolare, muratura vecchia	$15 \div 30$	$0.60 \div 0.85$	$0.75 \div 1.25$	50
Terra con erba, corsi d'ac- qua naturali regolari	70	1.30	1.50	40
Terra in cattive condizioni, corsi d'acqua naturali con ciottoli	$120 \div 200$	1.75	2.00	35
Canali in abbandono con vegetazione, corsi d'acqua con alveo in ghiaia o scavati in roccia	$300 \div 400$	$2.0 \div 2.3$	3.00	30

Bibliografia

- [1] Adami, A., Di Silvio, G., *Esercizi di Idraulica*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, ISBN 88-7784-046-3, pp. 250, 1992
- [2] Alfonsi, G., Orsi, E., *Problemi di Idraulica e Meccanica dei Fluidi*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, pp. 507+V, 1984
- [3] Autori sconosciuti, *Idraulica, Lezioni – Esercizi*. Edizioni C.L.U.T., Torino, pp. 360. Prima Edizione: 1987
- [4] Broadwell, J.E., Shocks and energy dissipation in inviscid fluids: a question proposed by Lord Rayleigh, *Journal of Fluid Mechanics* 347, 375–380, 1997
- [5] Cenedese, A., *Meccanica dei fluidi*, McGraw-Hill, pp. XV+238. Prima edizione: 2003
- [6] Cengel, Y.A. and Cimbala, J.M., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-111566-8, pp. 956+XXV, 2006
- [7] Chow, V.T., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-085906-X, pp. 680+XVIII, 1959
- [8] Citrini, D., Nosedà G., *Idraulica*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, pp. 468+X, 1982
- [9] Crane Co., *Flow of Fluids through valves, fittings and pipe*, Technical Paper No. 410M, 1979
- [10] Datei, C., *Idraulica*, Libreria Internazionale Cortina, Padova, pp. XVII+269. Prima edizione: 1983
- [11] De Marchi, G., *Idraulica, basi scientifiche ed applicazioni tecniche*. Volume I – Parte 1^a, Hoepli, Milano, pp. XXXI+237. Prima edizione: 1929
- [12] De Marchi, G., *Idraulica, basi scientifiche ed applicazioni tecniche*. Volume I – Parte 2^a, Hoepli, Milano, pp. XII+372. Prima edizione: 1939
- [13] De Marchi, G., Nosedà, G. e Citrini, D., *Nozioni di Idraulica, con particolare riguardo ai problemi delle bonifiche e delle irrigazioni*, Edagricole, pp. XI+272. Prima edizione: 1947
- [14] Evangelisti, G., Il colpo d'ariete nelle condotte elevatorie munite di camera d'aria, *L'Energia Elettrica*, Settembre 1938
- [15] Fox, R.W., McDonald, A.T., *Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-59274-9, pp. 781+XVI, 1994

- [16] Ghetti, A., *Idraulica*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, ISBN 88-7784-052-8, pp. 566+XI, 1977
- [17] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, in *Course of Theoretical Physics*, Vol. 6, Elsevier, ISBN 0-7506-2767-0. pp. 539+XIII, 1987
- [18] Marchi, E., Rubatta, A., *Meccanica dei Fluidi*, UTET, 1981, ISBN 88-02-03659-4, pp. 800+XVI
- [19] Marone, V., *Idraulica*, Liguori Editore, Napoli, pp. 881. Prima edizione: 1990
- [20] Montuori, C., *Complementi di Idraulica*, Liguori Editore, pp. XII+465. Prima edizione: 1996
- [21] Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-44250-X, pp. 840+XVII, 2002
- [22] Nosedà, G., Profili di corrente nei canali rettangolari divergenti e convergenti. *Atti del IX Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Trieste, 1965*
- [23] Orabona, E., *Lezioni di Idraulica*, Adriatica Editrice, Bari, pp. 504. Prima edizione: 1970
- [24] Pnueli, D. e Gutfinger, C., *Meccanica dei Fluidi*, Zanichelli, Bologna, pp. IX+429. Prima edizione (in inglese): 1992
- [25] Rayleigh, Lord, Aerial plane waves of finite amplitude, *Proc. R. Soc. Lond.* A84, 247–284, 1910
- [26] Shames, I.H., *Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-056387-X, pp. 855+XIX, 1992
- [27] Streeter, V.L., Wylie, E.B., *Hydraulic Transients*, McGraw-Hill, pp. 329, 1967
- [28] Streeter, V.L., Wylie, E.B., Bedford, K.W., *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-115600-3, pp. 740+XI
- [29] Supino, G., *Idraulica Generale*, Casa Editrice Pàtron, Bologna, pp. VI+319. Prima edizione: 1954